

# Invariante Kreise unter Flächenautomorphismen

DIEGO RATTAGGI

Diplomarbeit an der ETH Zürich  
unter der Leitung von Prof. Dr. Hansjörg Geiges  
WS 97/98



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Grundlagen: klassischer Fall . . . . .	4
1.2	Grundlagen: allgemeiner Fall . . . . .	18
1.3	Klassifikation/Fallunterscheidung . . . . .	21
1.3.1	Fall I: $S$ orientierbar, $f$ orientierungserhaltend . . . . .	22
1.3.2	Fall II: $S$ orientierbar, $f$ orientierungsumkehrend . . . . .	24
1.3.3	Fall IIa): $S/\langle f \rangle$ orientierbar . . . . .	24
1.3.4	Fall IIb): $S/\langle f \rangle$ nicht-orientierbar . . . . .	25
1.3.5	Fall III: $S$ nicht-orientierbar, $p$ ungerade . . . . .	27
1.3.6	Fall IV: $S$ nicht-orientierbar, $p$ gerade . . . . .	28
1.3.7	Fall IVa): $S/\langle f \rangle$ orientierbar . . . . .	28
1.3.8	Fall IVb): $S/\langle f \rangle$ nicht-orientierbar . . . . .	29
1.4	Maximale Ordnung zu vorgegebenem $g$ . . . . .	31
1.4.1	Zyklische Gruppe . . . . .	31
1.4.2	Volle Automorphismengruppe . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Fall I</b>	<b>33</b>
2.1	Sätze aus [35] . . . . .	33
2.2	Sätze aus [22] . . . . .	34
2.3	Tabelle: invariante Kreise für $0 \leq g \leq 5$ . . . . .	35
2.4	$f : F_{5339} \rightarrow F_{5339}$ der Ordnung 3570 ohne invarianten Kreis . . . . .	41
2.5	Abbildungen ohne invarianten Kreis . . . . .	44
2.5.1	$l = 3$ . . . . .	45
2.5.2	$l = 3$ , Konstruktion vom Typ $r_3 = r_1 + r_2$ . . . . .	45
2.5.3	$l = 3$ , Variante von 2.5.2 . . . . .	46
2.5.4	$l = 3$ , allgemeiner Fall . . . . .	49
2.5.5	Bemerkung zur Programmierung . . . . .	53
2.5.6	$l \geq 4$ , Spezialfall $r_l = r_1 + \dots + r_{l-1}$ . . . . .	53
2.5.7	$l = 4$ , allgemeiner Fall . . . . .	55
2.5.8	$l = 5$ , allgemeiner Fall . . . . .	56
2.5.9	$l \geq 6$ . . . . .	57

2.5.10	Folgerungen/Vermutung . . . . .	57
2.6	Zusammenhang Fixpunkt $\leftrightarrow$ invarianter Kreis für $p > O(g)$ . . . . .	58
2.7	Verhalten unter Konjugation und Potenzieren . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Fall III</b> . . . . .	<b>68</b>
3.1	Liste der möglichen Abbildungen für $3 \leq g \leq 20$ . . . . .	69
3.2	Invariante Kreise auf $\mathbf{RP}^2$ und $K$ . . . . .	73
3.2.1	$\mathbf{RP}^2$ . . . . .	74
3.2.2	Kleinsche Flasche $K$ . . . . .	74
3.2.3	Existenz von invarianten Kreisen . . . . .	75
3.3	Verallgemeinerung von Lemma 1, 2 und 3 aus [35] . . . . .	75
3.4	Existenz von invarianten essentiellen Kreisen für $p$ prim . . . . .	77
3.5	Existenz eines inv. essentiellen Kreises zu jedem (ungeraden) $p$ . . . . .	80
3.6	Abbildungen ohne invarianten Kreis . . . . .	81
3.7	Maximale (ungerade) Ordnung . . . . .	83
3.8	Liste der Abbildungen, in denen $p_{max}(g)$ realisiert wird . . . . .	88
3.9	Berechnung von $p_{max}(g)$ für gerades $g$ . . . . .	92
3.10	Annahme der Schranken aus Kapitel 3.7 . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Fall II und IV</b> . . . . .	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Computerprogramme</b> . . . . .	<b>98</b>
A.1	C++ - Programm . . . . .	98
A.2	Maple-Programm . . . . .	101
	<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	<b>102</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Shicheng Wang und William H. Meeks III haben in [35] bzw. [22] die Existenz von invarianten (essentiellen) Kreisen unter orientierungserhaltenden Diffeomorphismen endlicher Ordnung auf geschlossenen orientierbaren Flächen untersucht.

Diese Arbeit beabsichtigt, einige der in [35] und [22] erzielten Ergebnisse aufzugreifen und zu vertiefen. Weiter zeigt sich, dass gewisse Beweistechniken auch unter allgemeineren Voraussetzungen anwendbar sind. Insbesondere erhält man so Resultate über die Existenz von invarianten Kreisen auf *nicht*-orientierbaren Flächen. Die nötigen Grundlagen dafür werden in Kapitel 1 bereitgestellt. Als wichtiges Hilfsmittel für die Verallgemeinerung hat sich [5] erwiesen.

In Kapitel 2 werden unter anderem sehr ausführlich periodische Abbildungen *ohne* invarianten Kreis (im klassischen orientierten Fall) analysiert. Dies ist insofern interessant, weil die “meisten” Abbildungen invariante Kreise besitzen.

In Kapitel 3 betrachten wir ausschliesslich periodische Abbildungen *ungerader* Ordnung auf geschlossenen *nicht*-orientierbaren Flächen. In diesem Fall ist die angesprochene Verallgemeinerung möglich und man erhält daher zahlreiche Ergebnisse.

Das ist jedoch nicht selbstverständlich, wie in Kapitel 4 angedeutet wird. Beispielsweise können neue Eigenschaften auftreten, wenn wir orientierungsumkehrende Abbildungen auf orientierten Flächen oder Abbildungen gerader Ordnung auf nicht-orientierbaren Flächen anschauen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Professor H. Geiges bedanken für die Auswahl des sehr interessanten Themas und für die ausgezeichnete Betreuung in den letzten vier Monaten.

## 1.1 Grundlagen: klassischer Fall

Dieses Kapitel beschreibt ziemlich ausführlich die wichtigsten Voraussetzungen und Definitionen, welche die Grundlagen für das gesamte Kapitel 2 bilden. Am Schluss dieses Kapitels werden die Hauptpunkte nochmals zusammengefasst.

**Definition.** Sei  $F_g$  eine orientierte geschlossene Fläche vom Geschlecht  $g$ , d.h. eine kompakte orientierte 2-Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Die Fläche  $F_g$  ist durch  $g$  bis auf Homöomorphie bestimmt. Praktisch immer setzen wir dabei  $g \geq 2$  voraus. Falls auch die Sphäre  $S^2$  oder der Torus  $T^2$  in die Untersuchungen miteinbezogen werden, wird dies speziell betont.

$f$  bezeichne eine orientierungserhaltende periodische Abbildung auf  $F_g$  der Ordnung  $p \geq 2$ . Dabei heisst  $f$  **periodisch** der Ordnung  $p$ , falls  $f^p = \text{id}_{F_g}$  und  $f^r \neq \text{id}_{F_g}$  ist, für alle  $1 \leq r < p$ . Jede periodische Abbildung ist automatisch bijektiv. Zusätzlich fordert man, dass  $f$  und  $f^{-1}$  differenzierbar sind (bezüglich der eindeutigen differenzierbaren Struktur von  $F_g$ ). Der Ausdruck *periodische Abbildung* soll deshalb immer periodischer Diffeomorphismus bedeuten. Die (endliche, möglicherweise leere) Menge der **singulären Punkte** definieren wir als

$$\{x \in F_g \mid \exists r \text{ mit } 1 \leq r < p \text{ und } f^r(x) = x\}.$$

Zum Beispiel sind in dieser Menge alle Fixpunkte von  $f$  enthalten. Punkte, die nicht singular sind, nennt man **regulär**.

Als Nächstes führen wir die zentralen Begriffe *Überlagerung* bzw. *verzweigte Überlagerung* ein. Die folgenden Definitionen stammen aus [33, Kapitel 6]:

**Definition.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine **Überlagerung** von  $X$  besteht aus einem topologischen Raum  $\tilde{X}$  und einer stetigen Abbildung  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ , so dass es zu jedem  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U$  mit folgenden zwei Eigenschaften gibt: i) Das Urbild  $\pi^{-1}(U)$  ist die Vereinigung von offenen paarweise disjunkten Mengen  $\tilde{U}_j \subset \tilde{X}$  für  $j \in J$ , wobei  $J$  eine nicht-leere Indexmenge ist. ii) Für alle  $j \in J$  ist  $\pi|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$  ein Homöomorphismus.

Für  $x \in X$  heisst das Urbild  $\pi^{-1}(x)$  die **Faser** über  $x$ . Die Mengen  $\tilde{U}_j$  sind die **Blätter** über  $U$ . Wenn  $X$  zusammenhängend ist, so sind je zwei Fasern gleichmächtig. Diese Mächtigkeit heisst **Blätterzahl** der Überlagerung; sie kann endlich oder unendlich sein. Eine Überlagerung  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  heisst **universell**, wenn  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist, d.h. wenn die Fundamentalgruppe  $\pi_1(\tilde{X})$  trivial ist. Eine **Decktransformation** ist ein Homöomorphismus  $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\pi \circ \tilde{h} = \pi$ . Zwei Überlagerungen  $\pi_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ ,  $\pi_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$  heissen **isomorph**, falls ein Homöomorphismus  $\tilde{h} : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  mit  $\pi_2 \circ \tilde{h} = \pi_1$  existiert,

also folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\tilde{h}} & \tilde{X}_2 \\
 & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\
 & X &
 \end{array}$$

Es gilt der bekannte Wegliftungssatz

**Satz 1.1.** Zu jedem Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  und jedem Punkt  $\tilde{x}$  in der Faser  $\pi^{-1}(\gamma(0))$  gibt es genau einen Lift  $\tilde{\gamma}$  von  $\gamma$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$  (d.h. einen Weg  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ ).

$$\begin{array}{ccc}
 & & \tilde{X} \\
 & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow \pi \\
 [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & X
 \end{array}$$

Die nächste Definition ist identisch mit [13, Definition 3.8.1]:

**Definition.** Sei  $D^2 = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ ,  $I = [0, 1]$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $k \in \mathbf{N} - \{1\}$  und

$$\begin{aligned}
 f_n : D^2 \times I^{k-2} &\rightarrow D^2 \times I^{k-2} \\
 (z, t_1, \dots, t_{k-2}) &\mapsto (z^n, t_1, \dots, t_{k-2}).
 \end{aligned}$$

Eine stetige Abbildung  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  zwischen metrischen Räumen wird **verzweigte Überlagerung** genannt, wenn es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine abgeschlossene Umgebung  $U$  gibt, so dass für jede Komponente  $\tilde{U}$  in  $\pi^{-1}(U)$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 D^2 \times I^{k-2} & \xrightarrow{\tilde{h}} & \tilde{U} \\
 f_n \downarrow & & \downarrow \pi|_{\tilde{U}} \\
 D^2 \times I^{k-2} & \xrightarrow{h} & U
 \end{array}$$

existiert, wobei  $h$  und  $\tilde{h}$  Homöomorphismen sind mit  $h(0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) = x$ . Die Zahl  $n$  heisst **Verzweigungsindex** von  $\tilde{x} = \pi^{-1}(x) \cap \tilde{U}$ . Die Bilder (unter  $\pi$ ) der Punkte mit Verzweigungsindex  $n > 1$  heissen **Verzweigungspunkte**. Wenn jedes  $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$  den gleichen Verzweigungsindex hat, sprechen wir auch vom Verzweigungsindex von  $x$ .

Daraus folgen sofort zwei Aussagen: i)  $X$  und  $\tilde{X}$  sind  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten (bei uns wird immer  $k = 2$  sein). ii) Sei  $B$  die Menge der Verzweigungspunkte. Die Einschränkung  $\pi : \tilde{X} - \pi^{-1}(B) \rightarrow X - B$  ist eine (unverzweigte) Überlagerung.

Schliesslich nennen wir eine verzweigte Überlagerung **zyklisch**, falls die Gruppe der Decktransformationen (der unverzweigten Überlagerung  $\pi : \tilde{X} \rightarrow \pi^{-1}(B) \rightarrow X - B$ ) zyklisch ist.

Die bisher definierten Begriffe finden in folgendem wichtigen Satz ihre Hauptanwendung:

**Satz 1.2.**  $\langle f \rangle := \{f, f^2, \dots, f^p = \text{id}_{F_g}\}$  ist eine zyklische Gruppe der Ordnung  $p$  mit Erzeuger  $f$ . Die Gruppe  $\langle f \rangle$  operiert auf  $F_g$  durch

$$\begin{aligned} \langle f \rangle \times F_g &\rightarrow F_g \\ (f^i, x) &\mapsto f^i(x) \end{aligned}$$

und induziert eine zyklische verzweigte Überlagerung  $q : F_g \rightarrow F_g/\langle f \rangle$  der Ordnung  $p$  mit  $l \geq 0$  Verzweigungspunkten  $B := \{y_1, \dots, y_l\} \subset F_g/\langle f \rangle$ . Dabei ist  $q$  die natürliche Projektion und  $F_g/\langle f \rangle$  wieder eine orientierbare geschlossene Fläche vom Geschlecht  $g'$ , für ein  $g' \geq 0$ . Seien  $m_1, \dots, m_l$  die Verzweigungsindizes der Verzweigungspunkte  $y_1, \dots, y_l$ . Dann gilt die **Riemann-Hurwitz Formel**

$$\frac{2g - 2}{p} = 2g' - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

Zu  $q : F_g \rightarrow F_g/\langle f \rangle$  gehört eine Monodromie-Darstellung

$$\theta : \pi_1(F_g/\langle f \rangle - B) \rightarrow Z_p$$

und umgekehrt. ( $Z_p$  steht für eine zyklische Gruppe der Ordnung  $p$ .)

Um Satz 1.2 verständlich zu machen und die Theorie weiterzuentwickeln, benutzen wir das Buch [24], in welchem in der Sprache der Riemannschen Flächen alle benötigten Werkzeuge bereitgestellt werden. Dass man sich hier auf Riemannsche Flächen konzentriert, ist kein Nachteil, wenn man weiss, dass  $F_g$  mit einer komplexen Struktur ausgestattet werden kann, so dass  $f$  als Automorphismus auf der Riemannschen Fläche  $F_g$  realisiert wird ([16]). Im Gegenteil, dadurch wird eine Verallgemeinerung auf die Theorie der sogenannten Kleinschen Flächen vorbereitet, die im Kapitel 1.2 eingeführt und im Kapitel 3 benutzt wird. Weiter bedienen sich auch viele der später verwendeten Arbeiten dieser Theorien, beispielsweise [1], [4], [5], [11], [15], [21], [25] oder [30]. Es lohnt sich also, einige wichtige grundlegende Definitionen sowie die für uns relevanten Sätze aus [24] zu zitieren. Mehrere bereits definierte Begriffe, wie z.B. *verzweigte Überlagerung* oder *Riemann-Hurwitz Formel* tauchen nochmals in einem etwas anderen Kontext auf, sind jedoch verträglich mit den ursprünglichen.



**Definition.** Eine **Riemannsche Fläche** ist ein zusammenhängender hausdorffscher topologischer Raum  $X$ , dessen Topologie eine abzählbare Basis besitzt, zusammen mit einer komplexen Struktur, d.h. mit einem maximalen komplexen Atlas auf  $X$ . Dieser **Atlas** besteht aus paarweise kompatiblen **komplexen Karten**

$$\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \mid U_\alpha \subset X \text{ offen, } V_\alpha \subset \mathbf{C} \text{ offen, } \phi_\alpha \text{ Homöomorphismus}\},$$

so dass  $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$  ist. Die Karte  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  heisst **kompatibel** mit  $\phi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ , falls entweder  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  oder  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  holomorph ist ([24, Definition I.1.1, 1.6, 1.14, 1.17, 1.18]).

**Satz 1.3.** ([24, Proposition I.1.23]) *Jede Riemannsche Fläche ist eine orientierbare wegzusammenhängende reelle 2-dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Eine kompakte Riemannsche Fläche ist diffeomorph zu  $F_g$  für genau ein  $g \geq 0$ .*

**Definition.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche. Die Abbildung  $F : X \rightarrow X$  ist ein **Automorphismus**, falls  $F$  bijektiv und biholomorph (d.h.  $F$  und  $F^{-1}$  holomorph) ist. Dabei heisst  $F$  **holomorph**, wenn für jedes  $x \in X$  komplexe Karten  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  ( $x \in U_1$ ),  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  ( $F(x) \in U_2$ ) existieren, so dass  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$  holomorph (im üblichen Sinn) in  $\phi_1(x)$  ist ([24, Definition II.3.1, 3.6]).

**Satz 1.4.** *Es seien  $X, Y$  Riemannsche Flächen und  $F, G : X \rightarrow Y$  holomorphe nicht-konstante Abbildungen. Dann gilt*

- i) ([24, Proposition II.3.10]) *Falls  $F$  und  $G$  auf einer Teilmenge von  $X$  übereinstimmen, die einen Häufungspunkt besitzt, dann ist  $F = G$ .*
- ii) ([24, Proposition II.3.12]) *Seien  $X$  und  $Y$  kompakt, dann ist  $F^{-1}(y)$  eine nicht-leere endliche Menge, für alle  $y \in Y$ .*
- iii) ([24, Proposition II.4.1]) *Zu  $F$  und jedem  $x \in X$  gibt es eine eindeutige natürliche Zahl  $n$  mit folgender Eigenschaft: Für jede Karte  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  auf  $Y$  mit  $\phi_2(F(x)) = 0$  existiert eine Karte  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  auf  $X$  mit  $\phi_1(x) = 0$ , so dass  $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^n$  ist.*

Es seien im Folgenden weiterhin  $X, Y$  Riemannsche Flächen und  $F : X \rightarrow Y$  eine holomorphe nicht-konstante Abbildung.

**Definition.** Die in Satz 1.4 iii) eingeführte Zahl  $n$  ist die **Multiplizität** von  $F$  in  $x$  ([24, Definition II.4.2]). Schreibweise:  $n = \text{mult}_x(F)$ . Ein Punkt  $y \in Y$  heisst **Verzweigungspunkt** von  $F$ , falls  $y = F(x)$  ist für ein  $x \in X$  mit  $\text{mult}_x(F) \geq 2$  ([24, Definition II.4.5]). Wenn  $X$  und  $Y$  kompakt sind, definiert man den **Grad** von  $F$  als

$$\deg(F) := \sum_{x \in F^{-1}(y)} \text{mult}_x(F).$$

Diese Summe ist endlich und unabhängig von  $y \in Y$  ([24, Proposition II.4.8, Definition II.4.9]).

**Beispiel.** ([24, Corollary II.4.10]) Für  $X$  kompakt und  $F : X \rightarrow X$  ein Automorphismus, ist  $\deg(F) = 1$ .

**Definition.** Seien  $X$  und  $Y$  kompakt. Wenn  $F$  Verzweigungspunkte hat, nennt man  $F$  **verzweigte Überlagerung**.  $F$  hat nur endlich viele Verzweigungspunkte  $B := \{y_1, \dots, y_l\}$ , weil  $X$  kompakt ist. Eliminiert man diese Verzweigungspunkte sowie deren Urbilder, ergibt sich durch Einschränkung eine (gewöhnliche) Überlagerung  $F : X - F^{-1}(B) \rightarrow Y - B$ .

**Satz 1.5.** ([24, Theorem II.4.16]) Seien  $X$  und  $Y$  kompakt,  $g$  bzw.  $g'$  bezeichne das Geschlecht von  $X$  bzw.  $Y$ . Die **Riemann-Hurwitz Formel** lautet

$$2g - 2 = \deg(F)(2g' - 2) + \sum_{x \in X} (\text{mult}_x(F) - 1).$$

Nur endlich viele Summanden sind positiv, weil  $X$  kompakt ist.

Ab jetzt sei  $f : X \rightarrow X$  ein (periodischer) Automorphismus der Ordnung  $p$  auf der kompakten Riemannschen Fläche  $X$ . Wie oben bezeichne  $\langle f \rangle := \{f, f^2, \dots, f^p = \text{id}_X\}$  die endliche zyklische Gruppe erzeugt von  $f$ . Dann gilt:

**Satz 1.6.** Die Gruppe  $\langle f \rangle$  operiert holomorph und treu (effektiv) auf  $X$  durch

$$\begin{aligned} \langle f \rangle \times X &\rightarrow X \\ (f^i, x) &\mapsto f^i(x), \end{aligned}$$

weil folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$(f^i \circ f^j)(x) = f^i(f^j(x)) \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq p \text{ und } x \in X,$$

$$f^p(x) = x \text{ für alle } x \in X,$$

$$x \mapsto f^i(x) \text{ ist holomorph für alle } 1 \leq i \leq p,$$

sowie

$$\{f^i \in \langle f \rangle \mid f^i(x) = x, \forall x \in X\} = \{f^p\}.$$

**Definition.** Der **Orbit** eines Punktes  $x \in X$  wird definiert als  $\langle f \rangle \cdot x := \{f(x), f^2(x), \dots, f^p(x) = x\}$ . Die **Stabilisatoruntergruppe** von  $x \in X$  ist die Untergruppe von  $\langle f \rangle$

$$\langle f \rangle_x := \{f^i \in \langle f \rangle \mid f^i(x) = x\}.$$

**Satz 1.7.** Die Stabilisatoruntergruppe  $\langle f \rangle_x$  ist zyklisch ([24, Proposition III.3.1]) und es gilt

$$p = |\langle f \rangle \cdot x| |\langle f \rangle_x|,$$

wobei  $|\cdot|$  für die Ordnung einer Gruppe steht.

$X/\langle f \rangle$  bezeichne den Quotientenraum, d.h. die Menge der Orbits und  $q : X \rightarrow X/\langle f \rangle$  sei die natürliche Projektion. Wir versehen  $X/\langle f \rangle$  mit der Quotiententopologie. Das bedeutet, dass  $U \subset X/\langle f \rangle$  offen ist, falls  $q^{-1}(U)$  offen in  $X$  ist. Die Abbildung  $q$  ist surjektiv, stetig und offen.

**Satz 1.8.** ([24, Theorem III.3.4]) Man kann auf  $X/\langle f \rangle$  Karten definieren, so dass gilt:  $X/\langle f \rangle$  ist eine kompakte Riemannsche Fläche,  $q : X \rightarrow X/\langle f \rangle$  ist holomorph,  $\deg(q) = p$  und  $\text{mult}_x(q) = |\langle f \rangle_x|$  für alle  $x \in X$ .

Sei  $y \in X/\langle f \rangle$  ein Verzweigungspunkt von  $q : X \rightarrow X/\langle f \rangle$  und sei

$$\{x_1, \dots, x_r\} := q^{-1}(y)$$

die Menge der zu  $y$  gehörenden singulären Punkte. Die Punkte  $x_1, \dots, x_r$  bilden einen Orbit und haben deshalb konjugierte Stabilisatoruntergruppen, insbesondere ist  $m := |\langle f \rangle_{x_j}|$  unabhängig von  $j$  ( $1 \leq j \leq r$ ) und es gilt  $m \cdot r = p$ .

Zusammenfassend gilt: Zu jedem Verzweigungspunkt  $y_i \in X/\langle f \rangle$  gehören ein  $2 \leq m_i \leq p$  und  $1 \leq r_i \leq p/2$  mit  $p = m_i \cdot r_i$ . Die Ordnung  $p$  ist also durch  $m_i$  und  $r_i$  teilbar. Schreibweise:  $m_i | p, r_i | p$ . Dabei ist  $m_i = \text{mult}_{x_j}(q)$  die Ordnung der Stabilisatoruntergruppe eines beliebigen Punktes  $x_j$  im Urbild von  $y_i$  und  $r_i$  die Länge des Orbits  $q^{-1}(y_i)$ , also gleichzeitig der Index der Stabilisatoruntergruppe  $\langle f \rangle_{x_j}$  in  $\langle f \rangle$ .

**Bemerkung.** Sei  $\{y_1, \dots, y_l\}$  die Menge der Verzweigungspunkte von  $q$  und  $g$  bzw.  $g'$  das Geschlecht von  $X$  bzw.  $X/\langle f \rangle$ . In diesem Fall lautet die Riemann-Hurwitz Formel gemäss Satz 1.5

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= \deg(q)(2g' - 2) + \sum_{x \in X} (\text{mult}_x(q) - 1) \\ &= p(2g' - 2) + \sum_{x \in X} (|\langle f \rangle_x| - 1) \\ &= p(2g' - 2) + \sum_{i=1}^l r_i(m_i - 1) \\ &= p(2g' - 2) + \sum_{i=1}^l (p - \frac{p}{m_i}) \\ &= p(2g' - 2 + \sum_{i=1}^l (1 - \frac{1}{m_i})). \end{aligned}$$

Die Gleichung hat also die Form

$$\frac{2g-2}{p} = 2g' - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right),$$

genau wie in Satz 1.2 behauptet (vergleiche [24, Corollary III.3.7]).

Als Nächstes wollen wir die am Ende von Satz 1.2 beschriebene und später oft benutzte Aussage über die Monodromie-Darstellung herleiten:

Sei  $B$  die Menge der Verzweigungspunkte von  $q : X \rightarrow X/\langle f \rangle$ . Man kann der  $p$ -blättrigen Überlagerung  $q : X - q^{-1}(B) \rightarrow X/\langle f \rangle - B$  folgendermassen eine sogenannte **Monodromie-Darstellung**  $\theta : \pi_1(X/\langle f \rangle - B, *) \rightarrow S_p$  zuordnen. (Dabei bezeichnet  $S_p$  die symmetrische Gruppe der Ordnung  $p!$ , also die Gruppe aller Permutationen der Menge  $\{1, \dots, p\}$ , und  $*$  sei ein Basispunkt in  $X/\langle f \rangle - B$ ; später werden wir den Basispunkt weglassen, weil er keine wesentliche Rolle spielt.)

Benenne die  $p$  Punkte in der Faser  $q^{-1}(*)$  mit  $\{x_1^*, \dots, x_p^*\}$ . Dabei sei  $x_k^* = f^{k-1}(x_1^*)$  für  $k = 1, \dots, p$ . Jeder geschlossene Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X/\langle f \rangle - B$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = *$  kann zu genau  $p$  Wegen  $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_p$  angehoben werden, wobei  $\tilde{\gamma}_k$  durch den Anfangspunkt  $\tilde{\gamma}_k(0) := x_k^*$  eindeutig festgelegt ist. Die Endpunkte  $\tilde{\gamma}_k(1)$  liegen auch in  $q^{-1}(*)$  und induzieren daher eine Permutation von  $\{x_1^*, \dots, x_p^*\}$  bzw. eine Permutation  $\sigma$  in  $S_p$  durch die Vorschrift  $x_k^* \mapsto \tilde{\gamma}_k(1) =: x_{\sigma(k)}^*$ . Diese Zuordnung hängt nicht vom gewählten Repräsentanten der Klasse  $[\gamma] \in \pi_1(X/\langle f \rangle - B, *)$  ab und liefert den gesuchten Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \theta : \pi_1(X/\langle f \rangle - B, *) &\rightarrow S_p \\ [\gamma] &\mapsto \sigma. \end{aligned}$$

Weil  $X - q^{-1}(B)$  zusammenhängend ist, zeigt man leicht, dass das Bild  $\text{im}(\theta)$  eine transitive Untergruppe von  $S_p$  bildet. Das bedeutet, dass zu jedem Paar  $(k_1, k_2)$ ,  $1 \leq k_1, k_2 \leq p$ , ein  $\sigma \in \text{im}(\theta)$  mit  $\sigma(k_1) = k_2$  existiert ([24, Lemma III.4.4]).

Wir wollen  $\theta$  noch ein wenig genauer studieren (vergleiche Abb. 1.1 für das Beispiel  $p = 6$ ). Sei  $y_i \in B$  ein Verzweigungspunkt von  $q$  und  $\{x_1^i, \dots, x_{r_i}^i\} = q^{-1}(y_i)$  die Faser über  $y_i$ . Wähle eine offene Umgebung  $W_i$  von  $y_i$  in  $X/\langle f \rangle$  so klein, dass  $q^{-1}(W_i)$  in  $r_i$  disjunkte offene Umgebungen  $U_1^i, \dots, U_{r_i}^i$  um  $x_1^i, \dots, x_{r_i}^i$  zerfällt. Es gibt lokale Koordinaten, in denen  $q|_{U_j^i} : U_j^i \rightarrow W_i$  die Form  $z \mapsto z^{m_i}$  hat, für alle  $1 \leq j \leq r_i$  und mit  $m_i = p/r_i$ . Betrachte die  $m_i$ -blättrige Überlagerung  $q|_{U_j^i - \{x_j^i\}} : U_j^i - \{x_j^i\} \rightarrow W_i - \{y_i\}$ . Sei  $w_i$  ein Basispunkt in  $W_i - \{y_i\}$  und  $\beta_i : [0, 1] \rightarrow W_i - \{y_i\}$  ein geschlossener Weg mit  $\beta_i(0) = \beta_i(1) = w_i$ , der sich einmal um  $y_i$  windet (in der Richtung der Orientierung von  $X/\langle f \rangle$ ). Dieser Weg  $\beta_i$  induziert in jedem  $U_j^i$  eine zyklische Permutation der jeweils  $m_i$  Punkte  $U_j^i \cap q^{-1}(w_i)$ . Wähle einen Weg  $\alpha_i$  von  $*$  nach  $w_i$  ( $\alpha_i$  passiere

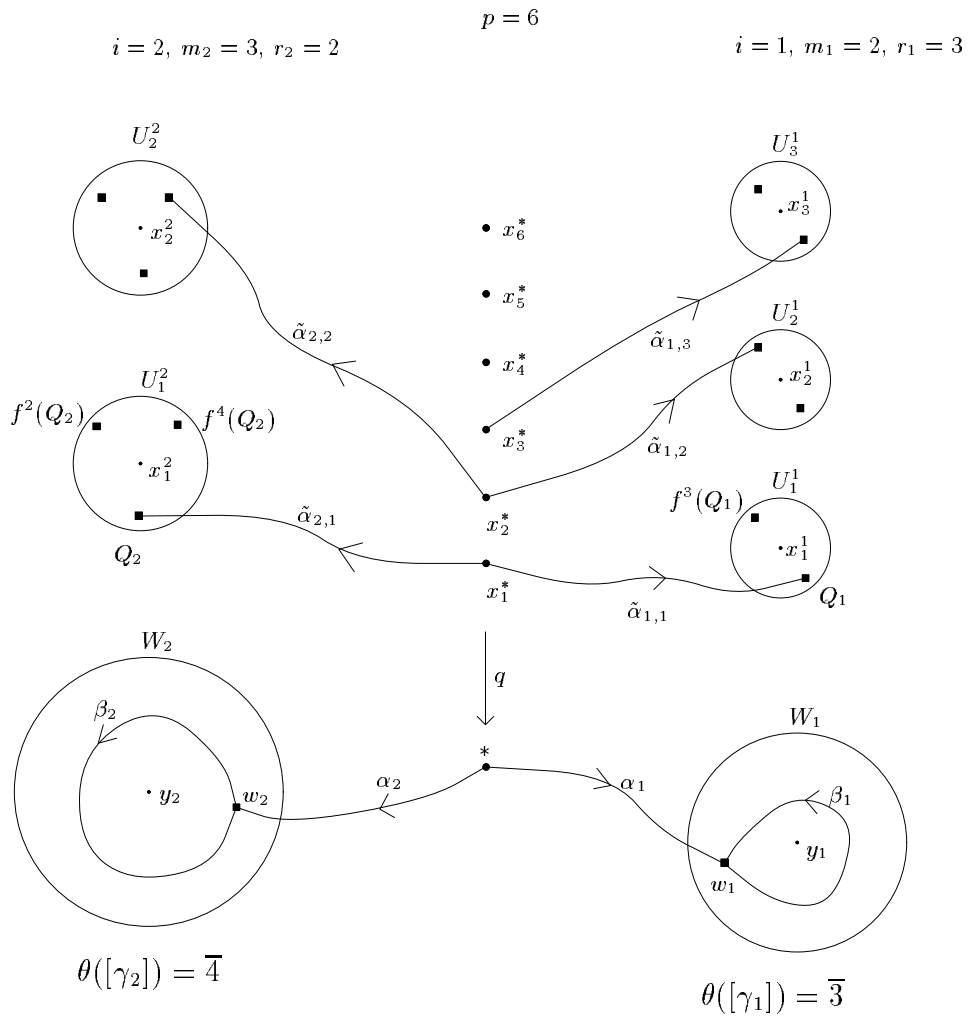


Abb. 1.1:  $\theta([\gamma_i])$

keinen Verzweigungspunkt) und definiere  $\gamma_i := \alpha_i \cdot \beta_i \cdot \alpha_i^{-1}$ . Damit ist  $\gamma_i$  ein geschlossener Weg mit Fusspunkt  $*$ , der sich einmal um  $y_i$  windet. Der Weg  $\alpha_i$  identifiziert die Fasern  $q^{-1}(*)$  und  $q^{-1}(w_i)$ . Somit erhält man  $\theta([\gamma_i])$  aus den durch  $\beta_i$  induzierten zyklischen Permutationen. Also ist  $\theta([\gamma_i])$  das Produkt von  $r_i$  disjunkten  $m_i$ -Zyklen und hat folglich den Zyklen-Typ

$$[0, \dots, \overset{m_i}{r_i}, \dots, \overset{p}{0}] \text{ für } m_i \neq p, \text{ bzw. } [0, \dots, 0, \overset{p}{1}] \text{ für } m_i = p,$$

vergleiche [24, Lemma III.4.6]. Ausserdem hat  $\theta([\gamma_i])$  die Ordnung  $m_i$  in  $S_p$ . Für  $k = 1, \dots, p$  bezeichnen wir mit  $\tilde{\alpha}_{i,k}$  den Lift von  $\alpha_i$  mit Anfangspunkt  $x_k^*$ . Den Endpunkt  $\tilde{\alpha}_{i,1}(1)$  nennen wir  $Q_i$ . Es ist möglich,  $q^{-1}(y_i)$  bzw.  $q^{-1}(W_i)$  so zu nummerieren, dass gilt:  $\tilde{\alpha}_{i,k}(1) \in U_{k \pmod{r_i}}^i$ . Insbesondere ist  $Q_i \in U_1^i$  und

$$U_1^i \cap q^{-1}(w_i) = \{Q_i, f^{r_i}(Q_i), f^{2r_i}(Q_i), \dots, f^{(m_i-1)r_i}(Q_i)\}.$$

Bezeichne mit  $\tilde{\beta}_i$  den Lift von  $\beta_i$  mit Anfangspunkt  $Q_i$ . Der Endpunkt  $\tilde{\beta}_i(1)$  liegt in  $U_1^i \cap q^{-1}(w_i)$ , d.h. wir können schreiben:  $\tilde{\beta}_i(1) = f^{n_i}(Q_i)$  für ein  $n_i \in \{r_i, 2r_i, \dots, (m_i-1)r_i\}$ . Man kann zeigen, dass gilt:  $\theta([\gamma_i]) = \bar{n}_i \in Z_p \subset S_p$ . Dabei identifizieren wir die Permutation  $(1, 2, \dots, p) \in S_p$  mit der Restklasse  $\bar{1} \in Z_p$  und fassen so  $Z_p$  als Untergruppe von  $S_p$  auf. Weiter gilt  $\text{im}(\theta) = Z_p$ . (Vergleiche dazu insbesondere [27, §2 und §4 in der englischen Übersetzung].)

Umgekehrt kann man aus einer Darstellung  $\theta : \pi_1(X/\langle f \rangle - B, *) \rightarrow Z_p$  (bis auf Isomorphie) die unverzweigte  $p$ -blättrige Überlagerung  $q : X - q^{-1}(B) \rightarrow X/\langle f \rangle - B$  wie folgt zurückgewinnen: Definiere eine Untergruppe  $L$  von  $\pi_1(X/\langle f \rangle - B, *)$  durch

$$L := \{[\gamma] \in \pi_1(X/\langle f \rangle - B, *) \mid \theta([\gamma])(1) = 1\}.$$

Diese Untergruppe operiert fasertreu auf der universellen Überlagerung  $F_0 : U_0 \rightarrow X/\langle f \rangle - B$  durch

$$\begin{aligned} L \times U_0 &\rightarrow U_0 \\ ([\gamma], u) &\mapsto \beta(1). \end{aligned}$$

Dabei wird  $\beta(1)$  folgendermassen konstruiert (siehe Abb. 1.2): Wähle einen Punkt  $\tilde{*} \in F_0^{-1}(*)$  und einen Repräsentanten  $\gamma$  von  $[\gamma]$ . Also ist  $\gamma$  ein geschlossener Weg mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = *$ . Wähle einen Weg  $\alpha$  von  $u$  nach  $\tilde{*}$ . Sei  $\tilde{\gamma}$  der Lift von  $\gamma$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{*}$  und  $\beta$  der Lift von  $(F_0 \circ \alpha)^{-1}$  mit  $\beta(0) = \tilde{\gamma}(1)$ . Somit liegt  $\beta(1)$  in der Faser über  $F_0(u)$ . Diese Konstruktion ist wohldefiniert und induziert eine  $p$ -blättrige Überlagerung  $U_0/L \rightarrow X/\langle f \rangle - B$ , die isomorph zu  $q : X - q^{-1}(B) \rightarrow X/\langle f \rangle - B$  ist (insbesondere ist  $U_0/L$  zu  $X - q^{-1}(B)$  homöomorph).

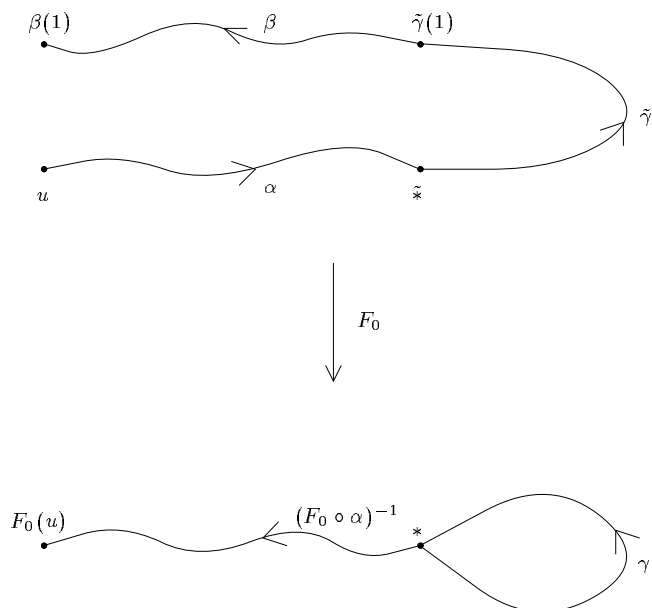


Abb. 1.2:  $\beta(1)$

In einem etwas allgemeineren Rahmen gelten die folgenden Aussagen:

**Satz 1.9.** ([24, p.89]) *i) Sei  $V$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine eindeutige Beziehung zwischen den Isomorphie-Klassen  $p$ -blättriger zusammenhängender Überlagerungen  $F : U \rightarrow V$  und Gruppenhomomorphismen  $\theta : \pi_1(V, *) \rightarrow S_p$  mit transitivem Bild (bis auf Konjugation in  $S_p$ ).*

*ii) Sei  $V$  eine Riemannsche Fläche. Dann gibt es eine eindeutige Beziehung zwischen den Isomorphie-Klassen unverzweigter holomorpher Abbildungen  $F : U \rightarrow V$  vom Grad  $p$  und Gruppenhomomorphismen  $\theta : \pi_1(V, *) \rightarrow S_p$  mit transitivem Bild (bis auf Konjugation in  $S_p$ ).*

*Die Konjugation in  $S_p$  entspricht jeweils einer Umnummerierung der Faser  $F^{-1}(*)$ .*

Die zurückgewonnene Überlagerung  $q : X - q^{-1}(B) \rightarrow X/\langle f \rangle - B$  lässt sich eindeutig zur ursprünglichen verzweigten Überlagerung  $q : X \rightarrow X/\langle f \rangle$  erweitern. Dies ist lokal eine Erweiterung von

$$\{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < 1\} \rightarrow \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < 1\}$$

$$z \mapsto z^{m_i}$$

zu

$$\{z \in \mathbf{C} : 0 \leq |z| < 1\} \rightarrow \{z \in \mathbf{C} : 0 \leq |z| < 1\}$$

$$z \mapsto z^{m_i}.$$

Es gilt allgemein folgender Satz:

**Satz 1.10.** ([24, Proposition III.4.9]) *Sei  $Y$  eine Riemannsche Fläche,  $B$  eine endliche Teilmenge von  $Y$  und  $*$  ein Grundpunkt von  $Y - B$ . Dann gibt es eine eindeutige Beziehung zwischen den Isomorphie-Klassen holomorpher Abbildungen  $F : X \rightarrow Y$  vom Grad  $p$ , deren Verzweigungspunkte in  $B$  liegen und Gruppenhomomorphismen  $\theta : \pi_1(Y - B, *) \rightarrow S_p$  mit transitivem Bild (bis auf Konjugation in  $S_p$ ).*

Jetzt verlassen wir die Theorie der Riemannschen Flächen und kehren zur ursprünglichen Situation zurück, die in Satz 1.2 ihren bisherigen Abschluss fand. Der nächste Satz beschreibt Eigenschaften, die von den  $l$  Verzweigungspunkten mit zugehörigen Indizes  $m_1, \dots, m_l$  erfüllt werden:

**Satz 1.11.** *Sei  $g \geq 2$  und  $f : F_g \rightarrow F_g$  eine orientierungserhaltende periodische Abbildung der Ordnung  $p$ . Dann gelten folgende sechs Bedingungen:*

i)  $\text{lcm}(m_1, \dots, \widehat{m}_i, \dots, m_l) = \text{lcm}(m_1, \dots, m_l)$  für alle  $i = 1, \dots, l$ , wobei  $\widehat{\phantom{x}}$  die Auslassung des Arguments bedeutet und  $\text{lcm}$  für das kleinste gemeinsame Vielfache steht.

ii)  $p$  ist durch  $\text{lcm}(m_1, \dots, m_l)$  teilbar.

iii) Wenn  $g' = 0$  ist, d.h. für  $F_g/\langle f \rangle \cong S^2$ , gilt  $\text{lcm}(m_1, \dots, m_l) = p$ .

iv)  $l \neq 1$ .

v) Für  $g' = 0$  ist  $l \geq 3$ .

vi) Sei  $\text{lcm}(m_1, \dots, m_l) = 2^r \cdot A$  für ein ungerades  $A$  und ein  $r \geq 1$ . Dann ist die Anzahl der  $m_i$ , die durch  $2^r$  teilbar sind, gerade.

Dieser Satz folgt aus [15, Theorem 4]. Um dies einzusehen, sollte man zumindest die folgende Definition und Satz 1.12 kennen. Ausserdem ist man damit in der Lage, den Beweis von Theorem 4 in [15] nachzuvollziehen.

**Definition.** Sei  $H$  die obere Halbebene  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$ . Eine **Fuchs-Gruppe**  $\Gamma$  ist eine diskrete Untergruppe von  $PSL(2, \mathbf{R})$ , so dass  $H/\Gamma$  kompakt ist.

Die letzte Forderung macht Sinn, weil  $PSL(2, \mathbf{R})$  isomorph zur Gruppe der (orientierungserhaltenden) Automorphismen auf  $H$  ist (siehe [17, Theorem 4.17.3 iii])). Ein Element in  $PSL(2, \mathbf{R})$  hat die Form

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in H, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Jede Fuchs-Gruppe  $\Gamma$  ist endlich präsentierbar mit Erzeugern und Relationen

$$\Gamma = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_l \mid$$

$$x_1^{m_1} = \dots = x_l^{m_l} = x_1 \cdot \dots \cdot x_l \cdot [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$



Dabei ist  $[a_i, b_i] := a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$  der **Kommutator** von  $a_i$  und  $b_i$ . Die obige Präsentation entspricht einer **Signatur**

$$\sigma(\Gamma) = (g; +; [m_1, \dots, m_l]; \{-\}).$$

In dieser Signatur bezeichnet  $g$  das Geschlecht von  $H/\Gamma$  und  $+$  =  $sign(\sigma(\Gamma))$  weist darauf hin, dass  $H/\Gamma$  orientierbar ist. Warum die  $m_i$  gleich wie die Verzweigungsindizes von  $q : F_g \rightarrow F_g/\langle f \rangle$  benannt sind, werden wir bald sehen. Die vierte Komponente der Signatur,  $\{-\}$ , bekommt erst bei der Verallgemeinerung auf *NEC-Gruppen* ihre Bedeutung, siehe Kapitel 1.2. Mehr über Fuchs-Gruppen findet man zum Beispiel in [17].

**Satz 1.12.** ([15, Theorem 1 und 2]) *i) Für  $g \geq 2$  ist  $F_g$  homöomorph zu  $H/\Gamma$ , wobei  $\Gamma$  eine Fuchs-Gruppe mit Signatur  $(g; +; [-]; \{-\})$  ist.*

*ii) Die zyklische Gruppe  $Z_p$  operiert genau dann als Automorphismengruppe auf  $F_g \cong H/\Gamma$ , wenn  $Z_p$  isomorph ist zu  $\Lambda/\Gamma$ , wobei  $\Lambda$  eine weitere Fuchs-Gruppe ist.*

Falls insbesondere  $\langle f \rangle \cong Z_p$  auf  $F_g$  operiert wie bisher, existiert ein sogenannter **Flächen-Kern-Homomorphismus**  $\phi : \Lambda \rightarrow Z_p$ . Der Name kommt daher, weil  $\ker(\phi) = \Gamma$  eine **Flächen-Gruppe** (Fundamentalgruppe von  $F_g$ ) ist, also die Signatur  $(g; +; [-]; \{-\})$  hat. Die Signatur  $(g'; +; [m_1, \dots, m_l]; \{-\})$  von  $\Lambda$  entspricht  $F_g/\langle f \rangle$ , weil gilt:  $F_g/\langle f \rangle \cong (H/\Gamma)/(\Lambda/\Gamma) \cong H/\Lambda$ . Deshalb interpretiert man  $\sigma(\Lambda)$  folgendermassen:  $g'$  ist das Geschlecht von  $F_g/\langle f \rangle$ , das Vorzeichen  $+$  bedeutet, dass  $F_g/\langle f \rangle$  orientierbar ist und die  $m_i$  stimmen mit den Indizes der Verzweigungspunkte von  $q : F_g \rightarrow F_g/\langle f \rangle$  überein. Damit folgt Satz 1.11 direkt aus [15, Theorem 4].

Jetzt wenden wir uns einem anderen Aspekt zu:

**Satz 1.13.** *Für  $g \geq 2$  existiert eine hyperbolische Metrik auf  $F_g$ , so dass  $f$  eine Isometrie wird.  $F_g/\langle f \rangle$  ist ein hyperbolischer 2-Orbifold und die Menge der Verzweigungspunkte  $B$  besteht aus Kegelpunkten.*

Dazu ein paar Erklärungen: Für die Definition der Begriffe **Orbifold** und **Kegelpunkt** ist [29, p.422, p.408] zu empfehlen. In [29, p.426] wird auch beschrieben, dass  $F_g/\langle f \rangle$  ein Orbifold ist. Den **zugrundeliegenden Raum** des Orbifolds  $F_g/\langle f \rangle$  bezeichnen wir übrigens später mit  $|F_g/\langle f \rangle|$ . Sei die obere Halbebene  $H$  ausgestattet mit der hyperbolischen Metrik, die gegeben ist durch  $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ . Hyperbolisch bedeutet, dass  $H$  so zu einem Raum mit konstanter Krümmung  $-1$  wird. Wie wir in Satz 1.12 gesehen haben, ist  $F_g \cong H/\Gamma$  und  $\langle f \rangle \cong \Lambda/\Gamma$ , deshalb also  $F_g/\langle f \rangle \cong H/\Lambda$ . Dabei sind  $\Gamma$  und  $\Lambda$  geeignete Fuchs-Gruppen; diese operieren als diskrete Gruppe von Isometrien auf  $H$ . Insbesondere trägt  $F_g/\langle f \rangle$  eine hyperbolische geometrische Struktur (vergleiche

[29, p.423]), was gemäss [29, p.426] äquivalent dazu ist, dass eine hyperbolische Metrik auf  $F_g$  existiert, so dass  $f$  eine Isometrie wird.

Nun definieren wir endlich, was *invariante Kreise* sind:

**Definition.** Ein **Kreis**  $C$  ist eine einfach geschlossene Kurve auf  $F_g$ , d.h. das Bild einer stetigen und auf  $[0, 1]$  injektiven Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow F_g$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Der Kreis  $C$  heisst **essentiell**, falls er keine Scheibe auf  $F_g$  begrenzt. Man kann zeigen, dass  $C$  genau dann essentiell ist, wenn  $[C]$  nichttrivial in  $\pi_1(F_g)$  ist (vergleiche hierzu Lemma 4.1 auf Seite 96).  $C$  heisst **invarianter Kreis** von  $f$ , wenn  $f(C) = C$  gilt. Ein invarianter Kreis von  $f$  muss natürlich nicht *punktweise* invariant unter  $f$  sein. Wir nennen  $C$  **trennend**, falls  $F_g - C$  nicht zusammenhängend ist. Ein nicht-essentieller Kreis ist immer trennend.

Man mache sich die drei möglichen Fälle a) essentieller, nicht-trennender Kreis, b) essentieller, trennender Kreis und c) nicht-essentieller, trennender Kreis am Beispiel  $F_2$  klar (Abb. 1.3).

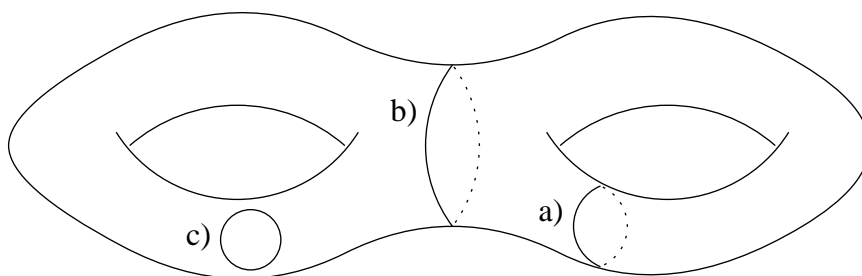


Abb. 1.3: verschiedene Typen von Kreisen

Sei  $C$  ein invarianter Kreis. Bis auf Isotopie<sup>1</sup> kann man annehmen, dass  $C$  glatt ist. Anders formuliert: in der Isotopieklasse von  $C$  existiert ein glatter invarianter Repräsentant. Denn falls  $C$  essentiell ist, gibt es eine eindeutige einfach geschlossene (glatte) Geodäte  $C^*$  isotop zu  $C$  (siehe [6, Theorem 1.6.6] oder [34, Proposition 4.6.20]). Folglich ist  $f(C) = C$  isotop zu  $f(C^*)$ . Weil  $f$  eine Isometrie ist, muss  $f(C^*)$  wieder eine Geodäte sein. Wegen der Eindeutigkeit von  $C^*$  in der Isotopieklasse von  $C$  folgt  $f(C^*) = C^*$ . Im anderen Fall ( $C$  nicht-essentiell) hat  $C$  konstanten Abstand zu einem Fixpunkt von  $f$ , ist also glatt. Statt Isotopieklassen kann man auch (freie) Homotopieklassen betrachten (vergleiche dazu [32, Baer's Theorem 6.2.5]).

Verständliche Einführungen zu einigen der in diesem Kapitel beschriebenen Punkte findet man ausserdem in [26], [27] oder [2].

<sup>1</sup>Eine *Isotopie* ist eine Homotopie  $H_t(x)$ , so dass jedes  $H_t$  ein Homöomorphismus (auf das Bild) ist.

Nun folgt die versprochene Zusammenfassung, in der nochmals die allerwichtigsten Voraussetzungen und Eigenschaften aufgelistet sind:

**Zusammenfassung.** Sei  $F_g$  eine orientierte geschlossene Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  und  $f : F_g \rightarrow F_g$  eine orientierungserhaltende periodische Abbildung der Ordnung  $p \geq 2$ . Dann gilt:

- 1)  $f$  induziert eine zyklische verzweigte Überlagerung  $q : F_g \rightarrow F_g/\langle f \rangle$ .
- 2) Zu  $q : F_g \rightarrow F_g/\langle f \rangle$  gehört eine Monodromie-Darstellung

$$\theta : \pi_1(F_g/\langle f \rangle - B) \rightarrow Z_p$$

und umgekehrt.

- 3) Es gelten die Riemann-Hurwitz Formel

$$\frac{2g-2}{p} = 2g' - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$$

und die Bedingungen aus Satz 1.11.

- 4) Es existiert eine hyperbolische Metrik auf  $F_g$ , so dass  $f$  eine Isometrie wird.

**Bemerkung.** Die Gruppe  $\pi_1(F_g/\langle f \rangle - B)$  kann beschrieben werden durch

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_{g'}, b_{g'}, x_1, \dots, x_l \mid$$

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_l \cdot [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_{g'}, b_{g'}] = 1 \rangle.$$

Dabei entspricht  $x_i$  einem kleinen orientierten Kreis um den  $i$ -ten Verzweigungspunkt von  $q : F_g \rightarrow F_g/\langle f \rangle$ . Wir wissen, dass  $\theta(x_i)$  die Ordnung  $m_i$  in  $Z_p$  hat. Insbesondere ist  $x_i^{m_i} \in \ker(\theta)$  und  $\theta$  induziert daher einen wieder mit  $\theta$  bezeichneten Gruppenhomomorphismus  $\Lambda \rightarrow Z_p$  mit

$$\Lambda = \langle a_1, b_1, \dots, a_{g'}, b_{g'}, x_1, \dots, x_l \mid$$

$$x_1^{m_1} = \dots = x_l^{m_l} = x_1 \cdot \dots \cdot x_l \cdot [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_{g'}, b_{g'}] = 1 \rangle.$$

$\Lambda$  ist eine Fuchs-Gruppe mit Signatur  $(g'; +; [m_1, \dots, m_l]; \{-\})$  und wird auch **Orbifold-Fundamentalgruppe**  $\pi_1^O(F_g/\langle f \rangle)$  genannt. Zur verzweigten Überlagerung  $q$  gehört deshalb auch immer die Darstellung

$$\theta : \pi_1^O(F_g/\langle f \rangle) \rightarrow Z_p$$

und umgekehrt. Dieser Sachverhalt kann auf alle von uns später betrachteten Fälle verallgemeinert werden (siehe [8, p.146] und [36, p.256]). Wir benutzen dies im Kapitel 3.

## 1.2 Grundlagen: allgemeiner Fall

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Situation in Kapitel 1.1 zu verallgemeinern. Beispielsweise kann man orientierungsumkehrende periodische Abbildungen  $f : F_g \rightarrow F_g$  untersuchen oder man betrachtet periodische Abbildungen auf *nicht*-orientierbaren Flächen  $N_g$ . Alle diese Fälle werden in einer einheitlichen Theorie erfasst. Diese Theorie umfasst die Begriffe *Kleinsche Fläche* und *NEC-Gruppe*, die als Verallgemeinerungen der Riemannschen Fläche bzw. Fuchs-Gruppe auftreten. Als Hauptquelle für die folgenden Definitionen und Aussagen dient [5].

**Definition.** Eine **Kleinsche Fläche**  $S$  ist eine Fläche (Rand erlaubt) mit einer dianalytischen Struktur ([5, p.3]). Eine **dianalytische Struktur** besteht grob gesagt aus Karten, deren Übergangsabbildungen komplex analytisch oder anti-analytisch sind.

**Beispiel.** Eine Riemannsche Fläche ist eine orientierbare Kleinsche Fläche ohne Rand (mit einer analytischen Struktur).

**Definition.** Ein Homöomorphismus  $f : S \rightarrow S$  ist ein **Automorphismus** von  $S$ , falls zu jedem  $s \in S$  Karten  $(U, \phi)$  um  $s$  bzw.  $(V, \psi)$  um  $f(s)$  sowie eine analytische Funktion  $F : \phi(U) \rightarrow \mathbf{C}$  existieren, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f|_U} & V \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \phi(U) & \xrightarrow{F} \mathbf{C} \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{C}^+ \end{array}$$

Dabei ist  $\mathbf{C}^+ = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$  und  $\Phi(x + iy) := x + i|y|$  (vergleiche [5, Definition 0.1.5, 0.1.6, 0.1.7, Corollary 0.1.8]).

Eine diskrete Untergruppe  $\Gamma$  von  $\operatorname{Aut}(H)$ , so dass  $H/\Gamma$  kompakt ist, heisst **NEC-Gruppe** ([5, Definition 0.2.9]).  $\operatorname{Aut}(H) \cong \operatorname{PGL}(2, \mathbf{R})$  ist die Gruppe der Automorphismen von  $H$ , wobei die analytische Struktur auf  $H$  durch die triviale Karte  $(U = H, \phi = \operatorname{id}_H)$  induziert wird. Beachte, dass  $\operatorname{Aut}(H)$  auch orientierungsumkehrende Abbildungen enthält. Die Abkürzung NEC-Gruppe steht übrigens für *nicht-euklidische kristallographische Gruppe*.

**Beispiel.** Eine NEC-Gruppe  $\Gamma$  ist eine Fuchs-Gruppe, falls  $\Gamma \subseteq \operatorname{Aut}^+(H)$  ist. (Dabei besteht  $\operatorname{Aut}^+(H)$  aus den orientierungserhaltenden Elementen in  $\operatorname{Aut}(H)$ .)

Eine NEC-Gruppe besitzt eine **Fundamentalregion**, definiert in [5, Definition 0.2.11]. Jede NEC-Gruppe  $\Gamma$  hat eine Präsentation ([5, p.14])

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_l, e_1, \dots, e_k, c_{1,0}, \dots, c_{1,s_1}, \dots, c_{k,0}, \dots, c_{k,s_k} \mid$$

$$x_1^{m_1} = \dots = x_l^{m_l} = x_1 \cdot \dots \cdot x_l \cdot e_1 \cdot \dots \cdot e_k \cdot [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_g, b_g] = 1,$$

$$c_{i,s_i} = e_i^{-1} c_{i,0} e_i, c_{i,j-1}^2 = c_{i,j}^2 = (c_{i,j-1} \cdot c_{i,j})^{n_{i,j}} = 1, i = 1 \dots k, j = 1 \dots s_i \rangle$$

mit zugehöriger **Signatur** ([5, Definition 0.2.13])

$$\sigma(\Gamma) = (g; +; [m_1, \dots, m_l]; \{(n_{1,1}, \dots, n_{1,s_1}), \dots, (n_{k,1}, \dots, n_{k,s_k})\})$$

bzw.

$$\langle d_1, \dots, d_g, x_1, \dots, x_l, e_1, \dots, e_k, c_{1,0}, \dots, c_{1,s_1}, \dots, c_{k,0}, \dots, c_{k,s_k} \mid$$

$$x_1^{m_1} = \dots = x_l^{m_l} = x_1 \cdot \dots \cdot x_l \cdot e_1 \cdot \dots \cdot e_k \cdot d_1^2 \cdot \dots \cdot d_g^2 = 1,$$

$$c_{i,s_i} = e_i^{-1} c_{i,0} e_i, c_{i,j-1}^2 = c_{i,j}^2 = (c_{i,j-1} \cdot c_{i,j})^{n_{i,j}} = 1, i = 1 \dots k, j = 1 \dots s_i \rangle$$

mit

$$\sigma(\Gamma) = (g; -; [m_1, \dots, m_l]; \{(n_{1,1}, \dots, n_{1,s_1}), \dots, (n_{k,1}, \dots, n_{k,s_k})\}).$$

Mit dieser Schreibweise entsprechen  $g, \pm$  bzw.  $k$  dem Geschlecht, der Orientierbarkeit bzw. der Anzahl Randkomponenten von  $H/\Gamma$ .

### Beispiele.

- Präsentation und Signatur einer Fuchs-Gruppe: Kapitel 1.1.
- Eine (berandete) **Flächen-Gruppe** wird beschrieben durch

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, e_1, \dots, e_k, c_1, \dots, c_k \mid$$

$$e_1 \cdot \dots \cdot e_k \cdot [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_g, b_g] = c_1^2 = \dots = c_k^2 = 1 \rangle$$

mit Signatur

$$(g; +; [-]; \{(-), \cdot^k, (-)\}, k \geq 0$$

bzw.

$$\langle d_1, \dots, d_g, e_1, \dots, e_k, c_1, \dots, c_k \mid$$

$$e_1 \cdot \dots \cdot e_k \cdot d_1^2 \cdot \dots \cdot d_g^2 = c_1^2 = \dots = c_k^2 = 1 \rangle$$

mit Signatur

$$(g; -; [-]; \{(-), \cdot^k, (-)\}, k \geq 0.$$

Die Flächen-Gruppe heisst **berandet**, falls  $k \geq 1$  ist.

- Die Präsentation

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_l, e_1, \dots, e_k, c_1, \dots, c_k \mid$$

$$x_1^{m_1} = \dots = x_l^{m_l} = x_1 \cdot \dots \cdot x_l \cdot e_1 \cdot \dots \cdot e_k \cdot [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_g, b_g] = 1,$$

$$c_1^2 = \dots = c_k^2 = 1 \rangle$$

entspricht der Signatur

$$(g; +; [m_1, \dots, m_l]; \{(-), \cdot^k, (-)\}).$$

- Die Fundamentalgruppen  $\pi_1(F_g)$  bzw.  $\pi_1(N_g)$  haben die Signatur

$$(g; +; [-]; \{-\}) \text{ bzw. } (g; -; [-]; \{-\}).$$

Für eine NEC-Gruppe  $\Gamma$  mit Signatur

$$\sigma(\Gamma) = (g; \pm; [m_1, \dots, m_l]; \{(n_{1,1}, \dots, n_{1,s_1}), \dots, (n_{k,1}, \dots, n_{k,s_k})\})$$

definiert man die **hyperbolische Fläche** einer beliebigen Fundamentalregion von  $\Gamma$  durch ([5, Definition 0.2.15])

$$\mu(\Gamma) := 2\pi \left[ \alpha g + k - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{i,j}}\right) \right],$$

$$\text{mit } \alpha = \begin{cases} 2, & \text{falls } \text{sign}(\sigma(\Gamma)) = + \\ 1, & \text{falls } \text{sign}(\sigma(\Gamma)) = - \end{cases}$$

Für eine NEC-Gruppe  $\Lambda$  und eine Untergruppe  $\Gamma$  von  $\Lambda$  von endlichem Index  $[\Lambda : \Gamma]$  gilt die Riemann-Hurwitz Formel ([5, p.17])

$$\frac{\mu(\Gamma)}{\mu(\Lambda)} = [\Lambda : \Gamma]. \quad (1.1)$$

Dieser Name ist gerechtfertigt, denn für

$$\begin{aligned} \sigma(\Gamma) &= (g; +; [-]; \{-\}), \\ \sigma(\Lambda) &= (g'; +; [m_1, \dots, m_l]; \{-\}), \\ [\Lambda : \Gamma] &= p, \end{aligned}$$

lautet die Gleichung (1.1)

$$\frac{2\pi [2g - 2]}{2\pi \left[ 2g' - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \right]} = p,$$

$$\text{bzw. } \frac{2g-2}{p} = 2g' - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right),$$

ist also tatsächlich die klassische Riemann-Hurwitz Formel.

Die Verallgemeinerungen von Satz 1.12 sind:

**Satz 1.14.** ([5, Theorem 1.2.3 für  $k = 0$ ]) *Sei  $S$  eine kompakte Kleinsche Fläche ohne Rand vom Geschlecht  $g$  und sei*

$$g \geq \begin{cases} 2, & \text{falls } S \text{ orientierbar} \\ 3, & \text{falls } S \text{ nicht-orientierbar ist.} \end{cases}$$

*Dann existiert eine Flächen-NEC-Gruppe  $\Gamma$ , so dass  $S \cong H/\Gamma$  gilt.*

**Satz 1.15.** ([5, Remark 1.3.6])  *$G$  ist eine Automorphismengruppe auf  $S \cong H/\Gamma$  genau dann, wenn  $G$  isomorph zu  $\Lambda/\Gamma$  ist, für eine NEC-Gruppe  $\Lambda$ , die  $\Gamma$  als Normalteiler enthält. (Insbesondere ist dann  $S/G \cong H/\Lambda$ .)*

Mehr Informationen über NEC-Gruppen gibt es in [20].

### 1.3 Klassifikation/Fallunterscheidung

Im Kapitel 1.2 wurden einige Hilfsmittel entwickelt, die es erlauben, den klassischen Fall aus Kapitel 1.1 zu verallgemeinern. Welche Fälle insgesamt auftreten können und wodurch diese charakterisiert sind, wird in diesem Kapitel in Form einer Übersicht angegeben. Alle Aussagen und vor allem deren Beweise kann man in [5] nachlesen. Dort werden zusätzlich neben den geschlossenen auch berandete Flächen in die Untersuchungen miteinbezogen. Wir gehen nun von folgender Situation aus:

Gegeben oder gesucht ist eine periodische Abbildung  $f : S \rightarrow S$  der Ordnung  $p \geq 2$  für eine geschlossene (Kleinsche) Fläche  $S$  vom Geschlecht  $g$ . Folgende Faktoren beeinflussen die Fallunterscheidung:

- Orientierbarkeit von  $S$
- Falls  $S$  orientierbar ist:  $f$  orientierungserhaltend oder -umkehrend
- Existenz von Rand in der  $S/\langle f \rangle$  zugrundeliegenden Fläche  $|S/\langle f \rangle|$  ( $S/\langle f \rangle$  hat keinen Rand als Orbifold)
- Orientierbarkeit von  $S/\langle f \rangle$
- $p$  gerade oder ungerade

Um eine einheitliche Theorie entwickeln zu können, beschränkt man sich auf  $g \geq 2$  für  $S$  orientierbar bzw.  $g \geq 3$  für  $S$  nicht-orientierbar. Alle diese  $S$  haben eine negative Euler-Charakteristik  $\chi$  und als universelle Überlagerung die obere Halbebene  $H$ . Nicht erfasst werden somit die folgenden geschlossenen Flächen:

- ★ Sphäre  $S^2$  (orientierbar,  $g = 0$ ,  $\chi = 2$ )
- ★ Torus  $T^2$  (orientierbar,  $g = 1$ ,  $\chi = 0$ )
- ★ Reell projektive Ebene  $\mathbf{RP}^2$  (nicht-orientierbar,  $g = 1$ ,  $\chi = 1$ )
- ★ Kleinsche Flasche  $K$  (nicht-orientierbar,  $g = 2$ ,  $\chi = 0$ )

Diese müssen deshalb getrennt untersucht werden (siehe Kapitel 2.3 und [35, Remark 3] für  $S^2$  und  $T^2$  im “Fall I”;  $\mathbf{RP}^2$  und  $K$  werden in Kapitel 3.2 im “Fall III” analysiert).

**Notation.**

$k'$  := Anzahl Randkomponenten von  $|S/\langle f \rangle|$

$g'$  := Geschlecht von  $S/\langle f \rangle$

$l$  := Anzahl Verzweigungspunkte von  $q : S \rightarrow S/\langle f \rangle$  (= Anzahl Kegelpunkte von  $S/\langle f \rangle$ )

$m_i$  := Index des  $i$ -ten Verzweigungspunkts von  $q$

$\{m_1, \dots, m_l\}$  hat die **ep.** (*elimination property*), falls für jedes  $i = 1, \dots, l$  gilt:

$$\text{lcm}(m_1, \dots, \widehat{m_i}, \dots, m_l) = \text{lcm}(m_1, \dots, m_l).$$

Wir unterscheiden die sechs Fälle I, IIa), IIb), III, IVa) und IVb). Diese werden in [5, Theorem 3.1.2, 3.1.3, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.8, 3.1.9] behandelt. Zur Klassifikation wird auch [5, Corollary 3.2.3] herangezogen.

### 1.3.1 Fall I: $S$ orientierbar, $f$ orientierungserhaltend

[5, Theorem 3.1.2, 3.1.5]

Folgerungen:

- $S/\langle f \rangle$  orientierbar
- $k' = 0$

Hinreichende und notwendige Bedingungen für die Existenz einer orientierungserhaltenden periodischen Abbildung der Ordnung  $p$  auf der orientierten geschlossenen Fläche  $S$  vom Geschlecht  $g$  (vergleiche Satz 1.11):

- $m_i \mid p$
- R-H (Riemann-Hurwitz Formel):  $\frac{2g-2}{p} = 2g' - 2 + \sum_{i=1}^l (1 - \frac{1}{m_i})$
- $\{m_1, \dots, m_l\}$  hat die ep.
- $g' = 0 \Rightarrow p = \text{lcm}(m_1, \dots, m_l)$



Weitere Folgerungen:

- $l \neq 1$
- $g' = 0 \Rightarrow l \geq 3$

Beispiel: (Abb. 1.4)

- $g = 3, p = 3$
- $f$  : Drehung um  $\frac{2\pi}{3}$
- $l = 2, m_1 = m_2 = 3$
- $g' = 1$

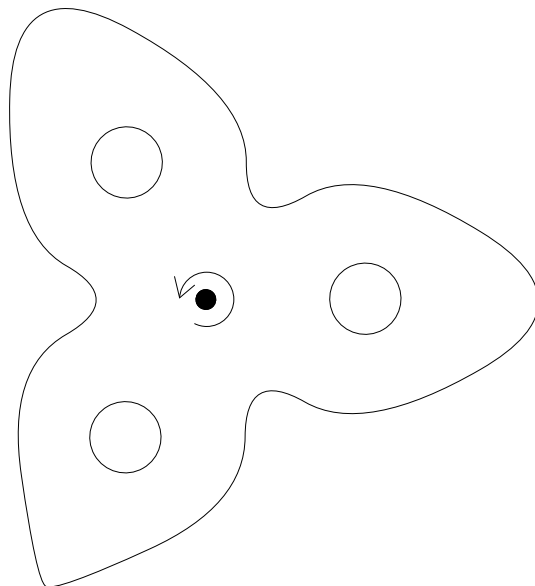


Abb. 1.4: Beispiel zu Fall I

Beispiel mit maximaler Ordnung: (vergleiche Kapitel 1.4)

- $g \geq 2, p = 4g + 2$
- $l = 3, m_1 = 2, m_2 = 2g + 1, m_3 = 4g + 2$
- $g' = 0$

### 1.3.2 Fall II: $S$ orientierbar, $f$ orientierungsumkehrend

Folgerung:

- $p$  gerade

### 1.3.3 Fall IIa): $S/\langle f \rangle$ orientierbar

[5, Theorem 3.1.5]

Folgerungen:

- $k' > 0$
- $p \in 2 + 4\mathbf{N}_0$

Hinreichende und notwendige Bedingungen für die Existenz einer orientierungsumkehrenden periodischen Abbildung der Ordnung  $p$  auf der orientierbaren geschlossenen Fläche  $S$  vom Geschlecht  $g$ , so dass  $S/\langle f \rangle$  orientierbar ist:

- $m_i \mid \frac{p}{2}$
- R-H:  $\frac{2g-2}{p} = 2g' - 2 + k' + \sum_{i=1}^l (1 - \frac{1}{m_i})$
- $[g' = 0 \text{ und } k' = 1] \Rightarrow \text{lcm}(m_1, \dots, m_l) = \frac{p}{2}$

Weitere Folgerung:

- Es existiert kein isolierter Fixpunkt.

Beispiel: (Abb. 1.5)

- $g = 2, p = 2$
- $f$  : Spiegelung an Ebene
- $l = 0$
- $g' = 1, k' = 1$

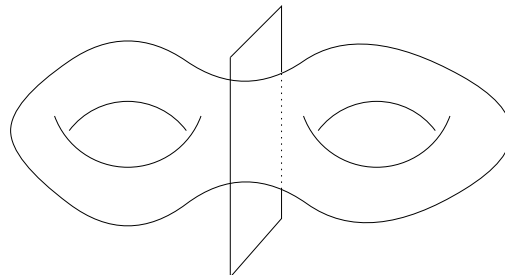


Abb. 1.5: Beispiel zu Fall IIa)

### 1.3.4 Fall IIb): $S/\langle f \rangle$ nicht-orientierbar

[5, Theorem 3.1.9]

Hinreichende und notwendige Bedingungen für die Existenz einer orientierungsumkehrenden periodischen Abbildung der Ordnung  $p$  auf der orientierbaren geschlossenen Fläche  $S$  vom Geschlecht  $g$ , so dass  $S/\langle f \rangle$  nicht-orientierbar ist:

- $m_i \mid p$
- R-H:  $\frac{2g-2}{p} = g' - 2 + k' + \sum_{i=1}^l (1 - \frac{1}{m_i})$
- $M := \text{lcm}(m_1, \dots, m_l) \neq p$
- $p = 2^r \cdot A$  ( $A$  ungerade)  $\Rightarrow \#\{m_i : 2^r \mid m_i\}$  gerade
- $\exists \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  mit  $\text{gcd}(\alpha_i, m_i) = 1$ , so dass  $\alpha_i \frac{p}{m_i}$  gerade ist  $\forall i$  und  $[k' = 0 \text{ und } p \in 4\mathbf{N}] \Rightarrow [\sum_{i=1}^l \alpha_i \frac{p}{m_i} \in 4\mathbf{N} \Leftrightarrow g' \text{ gerade}]$   
(gcd bezeichnet dabei den grössten gemeinsamen Teiler)
- $k' > 0 \Rightarrow [m_i \text{ ungerade und } p \notin 4\mathbf{N}]$
- $[g' = 1 \text{ und } k' = 0] \Rightarrow M = \frac{p}{2}$

Weitere Folgerungen:

- Es existiert kein isolierter Fixpunkt
- $p \in 4\mathbf{N} \Rightarrow k' = 0$

Beispiel mit  $k' = 0$ : (Abb. 1.6)

- $g = 3, p = 2$
- $f$ : Punktspiegelung
- $l = 0$
- $g' = 4, k' = 0$

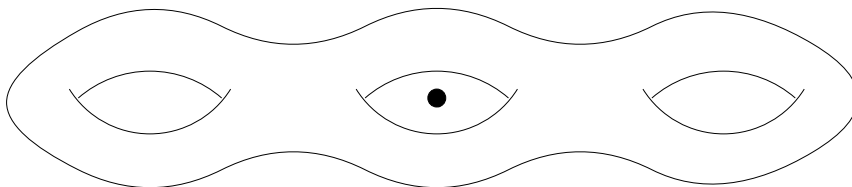


Abb. 1.6: Beispiel zu Fall IIb) mit  $k' = 0$

Beispiel mit  $k' > 0$ : (Abb. 1.7)

- $g = 2, p = 2$
- $f$  : Geradenspiegelung
- $l = 0$
- $g' = 2, k' = 1$

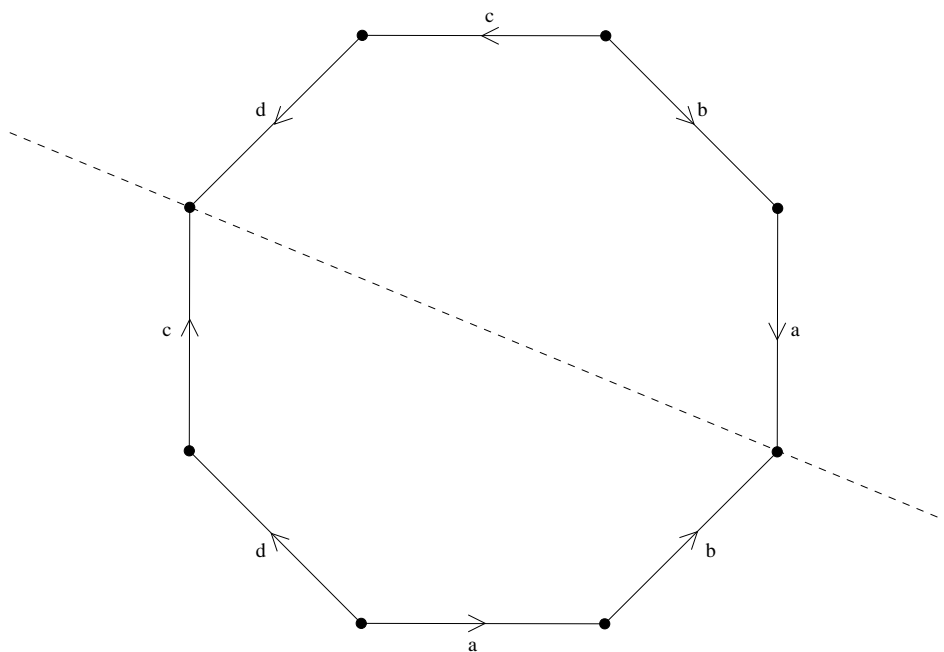


Abb. 1.7: Beispiel zu Fall IIb) mit  $k' > 0$

Beispiel mit maximaler Ordnung für  $g$  gerade: (vergleiche Kapitel 1.4)

- $g \geq 2$  gerade,  $p = 4g + 4$
- $l = 2, m_1 = 2, m_2 = g + 1$
- $g' = 1, k' = 0, \alpha = (1, 1)$

Beispiel mit maximaler Ordnung für  $g$  ungerade: (vergleiche Kapitel 1.4)

- $g \geq 3$  ungerade,  $p = 4g - 4$
- $l = 1, m_1 = 2$
- $g' = 2, k' = 0, \alpha_1 = 1$

### 1.3.5 Fall III: $S$ nicht-orientierbar, $p$ ungerade

[5, Theorem 3.1.3]

Folgerungen:

- $S/\langle f \rangle$  nicht-orientierbar
- $k' = 0$

Hinreichende und notwendige Bedingungen für die Existenz einer periodischen Abbildung der ungeraden Ordnung  $p$  auf der nicht-orientierbaren geschlossenen Fläche  $S$  vom Geschlecht  $g$ :

- $m_i \mid p$
- R-H:  $\frac{g-2}{p} = g' - 2 + \sum_{i=1}^l (1 - \frac{1}{m_i})$
- $g' = 1 \Rightarrow \text{lcm}(m_1, \dots, m_l) = p$

Beispiel: (Abb. 1.8)

- $g = 3, p = 3$
- $f$ : Drehung um  $\frac{2\pi}{3}$
- $l = 2, m_1 = m_2 = 3$
- $g' = 1$

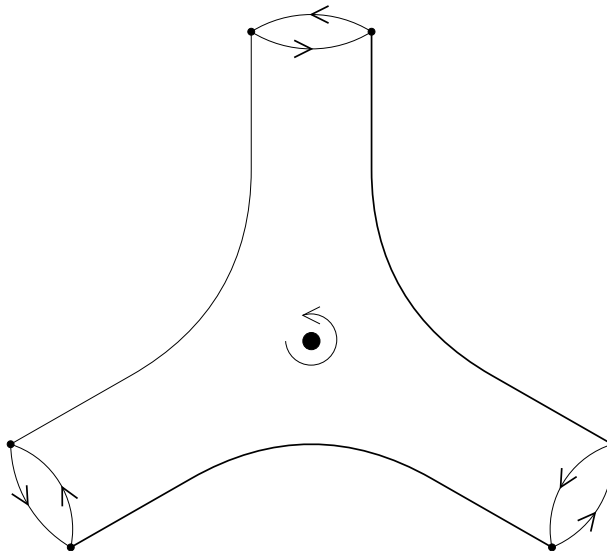


Abb. 1.8: Beispiel zu Fall III

### 1.3.6 Fall IV: $S$ nicht-orientierbar, $p$ gerade

### 1.3.7 Fall IVa): $S/\langle f \rangle$ orientierbar

[5, Theorem 3.1.6]

Folgerung:

- $k' > 0$

Hinreichende und notwendige Bedingungen für die Existenz einer periodischen Abbildung der geraden Ordnung  $p$  auf der nicht-orientierbaren geschlossenen Fläche  $S$  vom Geschlecht  $g$ , so dass  $S/\langle f \rangle$  orientierbar ist:

- $m_i \mid p$
- R-H:  $\frac{q-2}{p} = 2g' - 2 + k' + \sum_{i=1}^l (1 - \frac{1}{m_i})$
- $[g' = 0 \text{ und } k' = 1] \Rightarrow \text{lcm}(m_1, \dots, m_l) = p$

Beispiel: (Abb. 1.9)

- $g = 3, p = 2$
- $f$  : Spiegelung an Ebene
- $l = 3, m_1 = m_2 = m_3 = 2$
- $g' = 0, k' = 1$

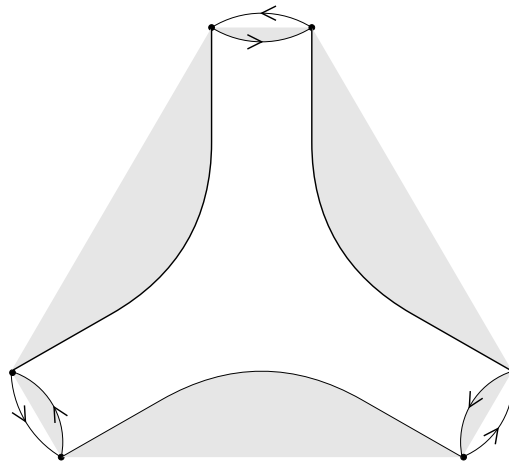


Abb. 1.9: Beispiel zu Fall IVa)

Beispiel mit maximaler Ordnung für  $g$  ungerade: (vergleiche Kapitel 1.4)

- $g \geq 3$  ungerade,  $p = 2g$
- $l = 2, m_1 = 2, m_2 = g$
- $g' = 0, k' = 1$

### 1.3.8 Fall IVb): $S/\langle f \rangle$ nicht-orientierbar

[5, Theorem 3.1.8]

Hinreichende und notwendige Bedingungen für die Existenz einer periodischen Abbildung der geraden Ordnung  $p$  auf der nicht-orientierbaren geschlossenen Fläche  $S$  vom Geschlecht  $g$ , so dass  $S/\langle f \rangle$  nicht-orientierbar ist:

- $m_i \mid p$
- R-H:  $\frac{g-2}{p} = g' - 2 + k' + \sum_{i=1}^l (1 - \frac{1}{m_i})$
- $k' = 0 \Rightarrow [\exists \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  mit  $\gcd(\alpha_i, m_i) = 1$  und  $\sum_{i=1}^l \alpha_i \frac{p}{m_i}$  gerade]
- $[k' = 0$  und  $g' = 1] \Rightarrow \text{lcm}(m_1, \dots, m_l) = p$
- $[k' = 0, g' = 2, p \in 4\mathbb{N}$  und jedes gerade  $\sum_{i=1}^l \alpha_i \frac{p}{m_i}$  (mit  $\gcd(\alpha_i, m_i) = 1$ ) ist durch 4 teilbar]  $\Rightarrow \frac{p}{m_i}$  ist ungerade für ein  $i$

Beispiel mit  $k' = 0$ : (Abb. 1.10)

- $g = 4, p = 4$
- $f$ : Drehung um  $\frac{2\pi}{4}$
- $l = 2, m_1 = m_2 = 4$
- $g' = 1, k' = 0, \alpha = (1, 1)$

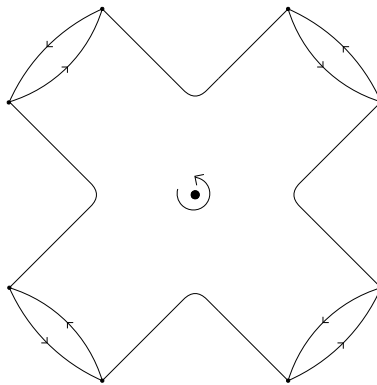


Abb. 1.10: Beispiel zu Fall IVb) mit  $k' = 0$

Beispiel mit  $k' > 0$ : (Abb. 1.11)

- $g = 3, p = 2$
- $f$  : Drehung um  $\frac{2\pi}{2}$
- $l = 1, m_1 = 2$
- $g' = 1, k' = 1$

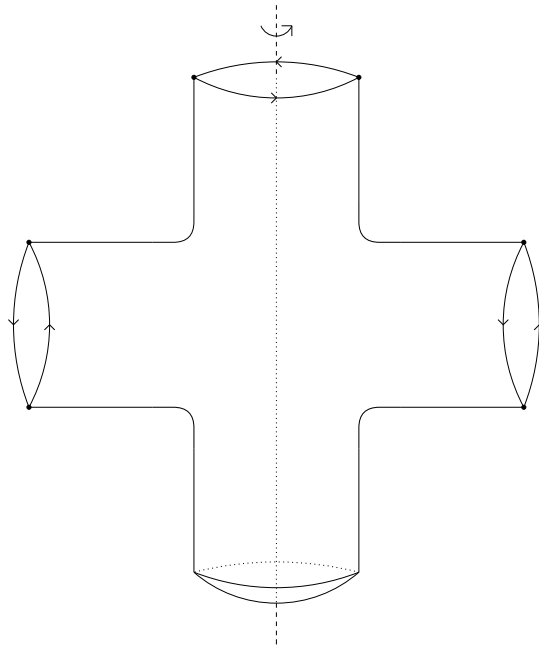


Abb. 1.11: Beispiel zu Fall IVb) mit  $k' > 0$

Beispiel mit maximaler Ordnung für  $g$  gerade: (vergleiche Kapitel 1.4)

- $g \geq 4$  gerade,  $p = 2g - 2$
- $l = 2, m_1 = 2, m_2 = 2g - 2$
- $g' = 1, k' = 0, \alpha = (1, 1)$



## 1.4 Maximale Ordnung zu vorgegebenem $g$

Dieses Kapitel gibt eine Zusammenstellung bekannter Sätze über die maximale Ordnung  $p$  einer zyklischen Automorphismengruppe bzw. über die Ordnung  $\mu(g)$  der vollen Automorphismengruppe auf einer vorgegebenen geschlossenen Fläche  $S$ . Allgemeine Voraussetzung sei  $g \geq 2$  für  $S$  orientierbar sowie  $g \geq 3$  für  $S$  nicht-orientierbar (ansonsten sind  $p$  und  $\mu(g)$  nicht beschränkt).

### 1.4.1 Zyklische Gruppe

**Satz 1.16.** *Unter den genannten Voraussetzungen an  $g$  folgt*

i) *Sei  $S$  orientierbar und  $f$  orientierungserhaltend (Fall I). Dann gilt*

$$p \leq 4g + 2.$$

ii) *Sei  $S$  orientierbar und  $f$  orientierungsumkehrend (Fall II). Dann gilt*

$$p \leq \begin{cases} 4g - 4, & g \text{ ungerade} \\ 4g + 4, & g \text{ gerade} \end{cases}$$

iii) *Sei  $S$  orientierbar (Fall I, II). Dann gilt*

$$p \leq \begin{cases} 4g + 2, & g \text{ ungerade} \\ 4g + 4, & g \text{ gerade} \end{cases}$$

iv) *Sei  $S$  nicht-orientierbar (Fall III, IV). Dann gilt*

$$p \leq \begin{cases} 2g, & g \text{ ungerade} \\ 2g - 2, & g \text{ gerade} \end{cases}$$

*Die hier angegebenen Schranken werden in jedem Fall für jedes  $g$  angenommen (Konstruktion in [36]).*

**Beweis.** Dieser Satz, insbesondere ii) und iv), wurde bereits 1935 in [31, Satz auf p.59] formuliert. In neueren Arbeiten wie [4], [11] und [36] wird ii) oder iv) nochmals bewiesen, ohne [31] zu erwähnen.

i) Originalbeweis (algebraische Kurven): [38]. Topologischer Beweis: [31]. Gruppentheoretischer Beweis: [15].

ii) [31], [11] und [36]

iii) Direkt aus i) und ii)

iv) [31], [14], [4] und [36] □

Einen Überblick zu analogen Sätzen für *berandete* kompakte Flächen findet man in [5, Theorem 3.2.18].

**Satz 1.17.** *Sei  $p$  prim:*

i) *Für  $S$  orientierbar (Fall I, II) gilt  $p \leq 2g + 1$ . Die Schranke  $p = 2g + 1$  wird genau für  $g' = 0, l = 3, m_1 = m_2 = m_3 = p$  angenommen.*

ii) *Für  $S$  nicht-orientierbar (Fall III, IV) gilt  $p \leq g$ . Die Schranke  $p = g$  wird genau für  $g' = 1, l = 2, m_1 = m_2 = p$  angenommen.*

**Beweis.** i) Fall I: direkt aus der Riemann-Hurwitz Formel (mache die Fallunterscheidung  $g' \geq 2, g' = 1, g' = 0$ ); Fall II: hier ist nur  $p = 2$  möglich und es gilt  $2 < 2g + 1$  nach Voraussetzung.

ii) Fall III: die Aussage wird bewiesen in Satz 3.4; Fall IV: nur  $p = 2$  ist möglich,  $2 < g$  nach Voraussetzung.  $\square$

## 1.4.2 Volle Automorphismengruppe

Bezeichne mit  $\mu(g)$  die Ordnung der Automorphismengruppe der Fläche  $S$  vom Geschlecht  $g$ :

**Satz 1.18.** ([28]) *Es gilt  $\mu(g) < \infty$ .*

**Satz 1.19.** *Es gelten folgende obere und untere Schranken für  $\mu(g)$ :*

i) *Sei  $S$  orientierbar. Dann ist  $\mu(g) \leq 84(g - 1)$  und  $\mu(g) = 84(g - 1)$  wird erreicht für unendlich viele  $g$ .*

ii) *Für  $S$  orientierbar ist  $8(g + 1) \leq \mu(g)$ , erreicht für unendlich viele  $g$ .*

iii) *Sei  $S$  nicht-orientierbar. Dann gilt  $\mu(g) \leq 84(g - 2)$ . Auch diese Schranke wird für unendlich viele  $g$  angenommen.*

**Beweis.** i) [16] bzw. [19]

ii) [1] und [21]

iii) [30]  $\square$

Analoge Schranken für *spezielle Klassen* von endlichen Automorphismengruppen (auflösbare, "supersoluble", nilpotente, p-Gruppen, abelsche) oder der Fall *berandeter* kompakter Flächen werden in [5, Chapter 4] untersucht.

# Kapitel 2

## Fall I

In diesem Kapitel untersuchen wir den klassischen Fall I. Die Grundlagen dafür wurden im Kapitel 1.1 bereitgestellt und alle Bezeichnungen werden von dort übernommen, d.h.  $f : F_g \rightarrow F_g$  sei eine orientierungserhaltende periodische Abbildung der Ordnung  $p$  und  $q : F_g \rightarrow F_g/\langle f \rangle \cong F_{g'}$  die induzierte verzweigte Überlagerung mit den Verzweigungsindizes  $m_1, \dots, m_l$ . Weiter sei  $\theta : \pi_1(F_g/\langle f \rangle - B) \rightarrow Z_p$  die dazugehörige Monodromie-Darstellung.

Weil die Sätze aus [35] und [22] in dieser Arbeit sehr häufig zitiert werden, sind diese in Kapitel 2.1 und 2.2 (ohne Beweise) vollständig aufgeführt. Die Nummerierung ist dabei dieselbe wie in den jeweiligen Originalwerken.

### 2.1 Sätze aus [35]

**Theorem 1.** *Sei  $p$  prim und  $f$  eine orientierungserhaltende periodische Abbildung der Ordnung  $p$  auf der orientierten geschlossenen Fläche vom Geschlecht  $g$ ,  $g \geq 2$ . Dann hat  $f$  einen invarianten essentiellen Kreis genau dann, wenn  $p \leq g + 1$  ist.*

**Theorem 2.** *Sei  $g \geq 2$  und*

$$O(g) := \begin{cases} 6, & g = 3 \\ 2g - 2, & g \geq 5 \text{ ungerade} \\ 2g + 2, & g \geq 2 \text{ gerade} \end{cases}$$

*Dann hat keine orientierungserhaltende periodische Abbildung  $f : F_g \rightarrow F_g$  der Ordnung  $p > O(g)$  einen invarianten essentiellen Kreis. Es gibt hingegen eine orientierungserhaltende periodische Abbildung der Ordnung  $p = O(g)$  auf  $F_g$ , die einen invarianten essentiellen Kreis hat.*

$f$  sei im Folgenden immer eine orientierungserhaltende periodische Abbildung der Ordnung  $p$  auf der orientierten geschlossenen Fläche  $F_g$ ,  $g \geq 2$ .

**Lemma 1.** Sei  $p > 2$ ,  $C$  ein invarianter Kreis von  $f$  auf  $F_g$  und  $r$  die Ordnung der Einschränkung von  $f$  auf  $C$ . Dann ist  $r = p$  und  $C$  enthält keinen singulären Punkt.

**Lemma 2.** Sei  $B$  die Menge der Verzweigungspunkte der verzweigten Überlagerung  $q : F_g \rightarrow F_g/\langle f \rangle$ . Sei  $p > 2$ ,  $\theta : \pi_1(F_g/\langle f \rangle - B) \rightarrow Z_p$  die durch  $q$  induzierte Darstellung und  $C$  ein invarianter Kreis von  $f$ . Dann ist  $q(C)$  ein Kreis in  $F_g/\langle f \rangle - B$  und  $\theta([q(C)])$  ein Erzeuger von  $Z_p$ .

Umgekehrt, falls  $\bar{C}$  ein Kreis in  $F_g/\langle f \rangle - B$  ist und  $\theta([\bar{C}])$  die Gruppe  $Z_p$  erzeugt, dann ist  $q^{-1}(\bar{C})$  ein invarianter Kreis von  $f$ .

**Lemma 3.** Sei  $p > 2$  und  $C$  ein invarianter Kreis von  $f$ . Der Kreis  $C$  trennt  $F_g$  genau dann, wenn  $q(C)$  den Quotienten  $F_g/\langle f \rangle$  trennt.

**Lemma 4.** Sei  $C$  ein invarianter Kreis von  $f$ ,  $F_g/\langle f \rangle = S^2$ ,  $q(C)$  ein Kreis in  $S^2$  und  $\theta([q(C)])$  ein Erzeuger von  $Z_p$ . Dann ist  $C$  genau dann essentiell, wenn jede Komponente von  $S^2 - q(C)$  mindestens zwei Verzweigungspunkte enthält.

**Subtheorem.** Jedes  $f$  der Ordnung  $p = 2$  hat einen invarianten essentiellen Kreis.

**Lemma 5.** Für  $g > 2$  hat kein  $f$  der Ordnung  $4g - 2$  einen Fixpunkt auf  $F_g$ . Dies gilt nicht für  $g = 2$ , denn es gibt eine Abbildung der Ordnung  $6 = 4 \cdot 2 - 2$  mit zwei Fixpunkten auf  $F_2$ .

**Lemma 6.** Es gibt kein  $f$  der Ordnung  $4g + 1$  mit einem Fixpunkt auf  $F_g$  für  $g \geq 2$ .

**Lemma 7.** Kein  $f$  der Ordnung  $p > 2g - 2$  auf  $F_g$  hat einen invarianten nicht-trennenden Kreis. Es gibt ein  $f$  der Ordnung  $2g - 2$  auf  $F_g$  mit einem invarianten nicht-trennenden Kreis.

**Lemma 8.** Zu jedem  $g \geq 1$  gibt es eine Abbildung der Ordnung  $4g + 2$  auf  $F_g$  mit einem Fixpunkt.

## 2.2 Sätze aus [22]

$f$  sei im Folgenden immer eine orientierungserhaltende periodische Abbildung der Ordnung  $p$  auf der orientierten geschlossenen Fläche  $F_g$ ,  $g \geq 1$ .

**Structure Theorem.** 1. Es existieren unendlich viele verschiedene Homologieklassen auf  $F_g$  repräsentiert durch invariante Kreise genau dann, wenn  $p = 2$  oder  $F_g/\langle f \rangle \neq S^2$  ist.

2. Im Fall  $p > 2$ ,  $F_g/\langle f \rangle = S^2$  trennt jeder invariante Kreis die Fläche  $F_g$ .

**Lemma 1.** Sei  $\theta : \pi_1(F_g/\langle f \rangle - B) \rightarrow Z_p$  die Darstellung von  $q : F_g \rightarrow F_g/\langle f \rangle$ . Dann gilt:  $C \subset F_g - q^{-1}(B)$  ist genau dann ein invarianter Kreis, wenn  $C$  der Lift eines Kreises  $\bar{C} \subset F_g/\langle f \rangle - B$  ist, so dass  $\theta([\bar{C}])$  die Gruppe  $Z_p$  erzeugt.

**Lemma 2.** Falls  $F_g/\langle f \rangle \neq S^2$  ist, gibt es unendlich viele verschiedene Homologieklassen auf  $F_g$ , die repräsentiert werden durch invariante Kreise, welche keine singulären Punkte enthalten.

**Lemma 3.** Sei  $p = 2$  und  $F_g/\langle f \rangle = S^2$ . Dann existieren unendlich viele verschiedene Homologieklassen auf  $F_g$ , die repräsentiert werden durch invariante Kreise, welche singuläre Punkte enthalten.

**Lemma 4.** Sei  $C$  ein invarianter Kreis, der einen singulären Punkt enthält. Dann folgt  $p = 2$ .

**Lemma 5.** Sei  $F_g/\langle f \rangle = S^2$  und  $p > 2$ . Dann trennt jeder invariante Kreis die Fläche  $F_g$ .

**Proposition 1.** Es gibt ein  $f_0$  der Ordnung 30 auf  $F_{11}$  mit folgenden beiden Eigenschaften:

- (1)  $f_0$  hat keinen invarianten Kreis.
- (2) Falls  $f : F_{11} \rightarrow F_{11}$  auch keinen invarianten Kreis hat, dann ist  $f$  konjugiert zu  $f_0^r$ , für ein  $r$  teilerfremd zu 30.

**Theorem 2.** (1) Falls  $p = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2}$  ist, für  $q_1, q_2$  prim und  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{N}_0$ , dann hat  $f$  einen invarianten Kreis.

(2) Für  $g < 11$  hat jedes  $f$  einen invarianten Kreis.

(3) Sei  $g \geq 1$ ,  $F_g \subset \mathbf{R}^3$  und  $f$  sei induziert durch eine Isometrie in  $\mathbf{R}^3$ . Dann hat  $f$  mindestens vier invariante Kreise.

**Bemerkung.** Die Bedingung in (1) ist insbesondere für  $p < 30$  erfüllt.

**Corollary.** Sei  $F_g \subset \mathbf{R}^3$  und  $f$  sei induziert durch eine Isometrie in  $\mathbf{R}^3$  von möglicherweise unendlicher Ordnung. Dann hat  $f$  einen invarianten Kreis.

**Conjecture.** Es gibt unendlich viele  $g$ , so dass jedes  $f : F_g \rightarrow F_g$  einen invarianten Kreis hat.

### 2.3 Tabelle: invariante Kreise für $0 \leq g \leq 5$

Die nächste Tabelle untersucht alle Typen von Abbildungen für  $0 \leq g \leq 5$  (im Fall I) bezüglich der Existenz von invarianten essentiellen bzw. nicht-essentiellen Kreisen. Insbesondere sind hier auch die Fälle  $g = 0$  und  $g = 1$  dabei, die mit der allgemeinen Theorie nicht erfasst werden. Falls eine Abbildung invariante essentielle Kreise besitzt, wird zusätzlich vermerkt, ob diese trennend oder nicht-trennend sind. Ein invarianter nicht-essentieller Kreis ist immer trennend.

Es folgt zuerst eine Erklärung der Abkürzungen in der Tabelle. Die Buchstaben A, B, C, D stehen für folgende Aussagen:

A: Es existiert ein invarianter nicht-essentieller (insbesondere trennender) Kreis.

B: Es existiert ein invarianter essentieller Kreis.

C: Es existiert ein invarianter essentieller trennender Kreis.

D: Es existiert ein invarianter essentieller nicht-trennender Kreis.

+ bedeutet, dass die Aussage wahr ist.

– bedeutet, dass die Aussage falsch ist.

$g$	$p$	$g'$	$l$	$m_i$	A	B	C	D
0	$> 1$	0	2	$p, p$	+	–	–	–
1	$> 1$	1	0		–	+	–	+
1	2	0	4	2, 2, 2, 2	+	+	–	+
1	3	0	3	3, 3, 3	+	–	–	–
1	4	0	3	2, 4, 4	+	–	–	–
1	6	0	3	2, 3, 6	+	–	–	–
2	2	0	6	2, 2, 2, 2, 2, 2	+	+	+	+
2	2	1	2	2, 2	+	+	+	+
2	3	0	4	3, 3, 3, 3	+	+	+	–
2	4	0	4	2, 2, 4, 4	+	+	+	–
2	5	0	3	5, 5, 5	+	–	–	–
2	6	0	3	3, 6, 6	+	–	–	–
2	6	0	4	2, 2, 3, 3	–	+	+	–
2	8	0	3	2, 8, 8	+	–	–	–
2	10	0	3	2, 5, 10	+	–	–	–
3	2	0	8	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	+	+	+	+
3	2	1	4	2, 2, 2, 2	+	+	+	+
3	2	2	0		–	+	–	+
3	3	0	5	3, 3, 3, 3, 3	+	+	+	–
3	3	1	2	3, 3	+	+	–	+
3	4	0	4	4, 4, 4, 4	+	–	–	–
3	4	0	5	2, 2, 2, 4, 4	+	+	+	–
3	4	1	2	2, 2	–	+	–	+
3	6	0	4	2, 2, 6, 6	+	–	–	–
3	6	0	4	2, 3, 3, 6	+	+	+	–
3	7	0	3	7, 7, 7	+	–	–	–

3	8	0	3	4, 8, 8	+	-	-	-
3	9	0	3	3, 9, 9	+	-	-	-
3	12	0	3	2, 12, 12	+	-	-	-
3	12	0	3	3, 4, 12	+	-	-	-
3	14	0	3	2, 7, 14	+	-	-	-
4	2	0	10	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	+	+	+	+
4	2	1	6	2, 2, 2, 2, 2, 2	+	+	+	+
4	2	2	2	2, 2	+	+	+	+
4	3	0	6	3, 3, 3, 3, 3, 3	+	+	+	-
4	3	1	3	3, 3, 3	+	+	+	+
4	3	2	0		-	+	-	+
4	4	0	5	2, 4, 4, 4, 4	+	+	+	-
4	4	0	6	2, 2, 2, 2, 4, 4	+	+	+	-
4	4	1	2	4, 4	+	+	-	+
4	4	1	3	2, 2, 2	-	+	-	+
4	5	0	4	5, 5, 5, 5	+	+	+	-
4	6	0	4	2, 6, 6, 6	+	-	-	-
4	6	0	4	3, 3, 6, 6	+	+	+	-
4	6	0	5	2, 2, 2, 3, 6	+	+	+	-
4	6	0	5	2, 2, 3, 3, 3	-	+	+	-
4	6	1	2	2, 2	-	+	-	+
4	8	0	4	2, 2, 8, 8	+	+	+	-
4	9	0	3	9, 9, 9	+	-	-	-
4	10	0	3	5, 10, 10	+	-	-	-
4	10	0	4	2, 2, 5, 5	-	+	+	-
4	12	0	3	3, 12, 12	+	-	-	-
4	15	0	3	3, 5, 15	+	-	-	-
4	16	0	3	2, 16, 16	+	-	-	-
4	18	0	3	2, 9, 18	+	-	-	-
5	2	0	12	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	+	+	+	+
5	2	1	8	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	+	+	+	+
5	2	2	4	2, 2, 2, 2	+	+	+	+
5	2	3	0		-	+	-	+
5	3	0	7	3, 3, 3, 3, 3, 3, 3	+	+	+	-

5	3	1	4	3, 3, 3, 3	+	+	+	+
5	4	0	6	2, 2, 4, 4, 4, 4	+	+	+	-
5	4	0	7	2, 2, 2, 2, 2, 4, 4	+	+	+	-
5	4	1	3	2, 4, 4	+	+	+	+
5	4	1	4	2, 2, 2, 2	-	+	-	+
5	4	2	0		-	+	-	+
5	5	1	2	5, 5	+	+	-	+
5	6	0	4	6, 6, 6, 6	+	-	-	-
5	6	0	5	2, 2, 3, 6, 6	+	+	+	-
5	6	0	5	2, 3, 3, 3, 6	+	+	+	-
5	6	0	6	2, 2, 2, 2, 3, 3	-	+	+	-
5	6	1	2	3, 3	-	+	-	+
5	8	0	4	2, 4, 8, 8	+	+	+	-
5	8	1	2	2, 2	-	+	-	+
5	10	0	4	2, 2, 10, 10	+	-	-	-
5	11	0	3	11, 11, 11	+	-	-	-
5	12	0	3	6, 12, 12	+	-	-	-
5	15	0	3	3, 15, 15	+	-	-	-
5	20	0	3	2, 20, 20	+	-	-	-
5	22	0	3	2, 11, 22	+	-	-	-
8	6	1	4	2, 2, 3, 3	-	+	+	+
11	30	0	3	6, 10, 15	-	-	-	-

Die beiden letzten Zeilen wurden hinzugefügt, um zu zeigen, dass jede der acht möglichen Kombinationen von  $\pm$  angenommen wird.

**Bemerkung.** Die Daten  $g, p, g', l, m_i$  bestimmen eine Abbildung  $f$  nicht eindeutig. Zum Beispiel haben Konjugierte und primitive Potenzen von  $f$ , also Abbildungen der Form  $hf^r h^{-1}$  ( $h : F_g \rightarrow F_g$  Diffeomorphismus,  $\gcd(r, p) = 1$ ), die gleichen Daten wie  $f$  (siehe [27, insbesondere §11 in der englischen Übersetzung] und vergleiche auch [18]). Trotzdem ist aber die vorhergehende Tabelle “wohldefiniert”. Vergleiche dazu die nachfolgenden Kriterien und Kapitel 2.7.



Folgende Kriterien wurden zur Erstellung der Tabelle für  $2 \leq g \leq 5$  benutzt:

- $B \Leftrightarrow [C \vee D]$
- $A \vee B$  ([22, Theorem 2(2)])
- $\exists$  Fixpunkt  $\Leftrightarrow A$  (Lemma 2.8 auf Seite 58)
- $p > O(g) \Rightarrow \neg B$  ([35, Theorem 2])
- $[p > 2 \wedge g' = 0] \Rightarrow \neg D$  ([35, Lemma 3])
- $p > 2g - 2 \Rightarrow \neg D$  ([35, Lemma 7])
- $[g' = 0 \wedge l = 3] \Rightarrow \neg B$  ([35, Lemma 4])
- $p = 2 \Rightarrow B$  ([35, Subtheorem])
- $[p \text{ prim} \wedge p \leq g + 1] \Rightarrow B$  ([35, Theorem 1])
- $p = 2g + 1 \text{ prim} \Rightarrow \neg B$  ([35, Theorem 1])

Die Fälle  $g = 0$  und  $g = 1$  sind in ([35, Remark 3]) beschrieben. Mit den angegebenen Kriterien kann die Tabelle noch nicht vollständig erstellt werden. Um sie zu komplettieren, muss man sich folgende Überlegungen machen, die auch Wang im Beweis von [35, Theorem 2] benutzt: Falls  $f$  einen invarianten essentiellen trennenden Kreis  $C$  besitzt, dann wird  $F_g$  disjunkt zerlegt in

$$F_g = C \dot{\cup} \mathring{F}_{g_1} \dot{\cup} \mathring{F}_{g_2}.$$

Dabei ist  $\mathring{F}_{g_i} = F_{g_i} - D_i$ , für abgeschlossene Scheiben  $D_1, D_2$  und es gilt  $g = g_1 + g_2$ ,  $g_i \geq 1$ . Für  $p > 2$  besitzt  $C$  nach [35, Lemma 1] keinen singulären Punkt, folglich ist  $f|_C$  eine Rotation auf  $C$  und  $\mathring{F}_{g_1}, \mathring{F}_{g_2}$  bleiben invariant unter  $f$ , da  $f$  orientierungserhaltend ist. Insbesondere induziert  $f$  durch Restriktion Abbildungen der Ordnung  $p$  auf  $\mathring{F}_{g_1}$  bzw.  $\mathring{F}_{g_2}$ , die zu Abbildungen auf  $F_{g_i}$  erweitert werden können. Dabei entsteht ein zusätzlicher singulärer Punkt, genauer gesagt ein Fixpunkt. Die so konstruierten  $f_1 : F_{g_1} \rightarrow F_{g_1}$  bzw.  $f_2 : F_{g_2} \rightarrow F_{g_2}$  sind wieder orientierungserhaltend, periodisch und haben dieselbe Ordnung wie  $f$ . Mit  $f$  sind deshalb auch  $f_1$  und  $f_2$  in der Tabelle vertreten.

Die gemachte Konstruktion kann auch umgekehrt durchgeführt werden: Man nimmt zwei periodische orientierungserhaltende Abbildungen  $f_1 : F_{g_1} \rightarrow F_{g_1}$  und  $f_2 : F_{g_2} \rightarrow F_{g_2}$  ( $g_i \geq 1$ ) der gleichen Ordnung  $p$  mit mindestens je einem Fixpunkt  $x_1 \in F_{g_1}$  bzw.  $x_2 \in F_{g_2}$ . Dies induziert eine periodische orientierungserhaltende Abbildung  $f$  der Ordnung  $p$  auf der verbundenen Summe  $F_{g_1} \# F_{g_2} \cong F_{g_1+g_2}$ , wobei  $F_{g_1} \# F_{g_2}$  gebildet wird, indem man kleine Scheiben (auf  $F_{g_1}$  bzw.  $F_{g_2}$ ) um  $x_1$  bzw.  $x_2$  herausschneidet und  $\mathring{F}_{g_1}$  mit  $\mathring{F}_{g_2}$  verklebt.  $f$  hat nach Konstruktion einen invarianten essentiellen trennenden Kreis, nämlich den Kreis, entlang dem  $\mathring{F}_{g_1}$  mit  $\mathring{F}_{g_2}$  verklebt wurde.

Die beschriebenen Konstruktionen kann man an folgendem einfachen Beispiel anschaulich gut nachvollziehen (Abb. 2.1):

Die Abbildung, beschrieben durch

$g$	$p$	$g'$	$l$	$m_i$
3	2	0	8	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2

kann zerlegt werden in

2	2	0	6	2, 2, 2, 2, 2, 2	sowie
1	2	0	4	2, 2, 2, 2.	

Natürlich könnte jetzt  $2 \ 2 \ 0 \ 6 \ 2, 2, 2, 2, 2, 2$  nochmals "halbiert" werden.

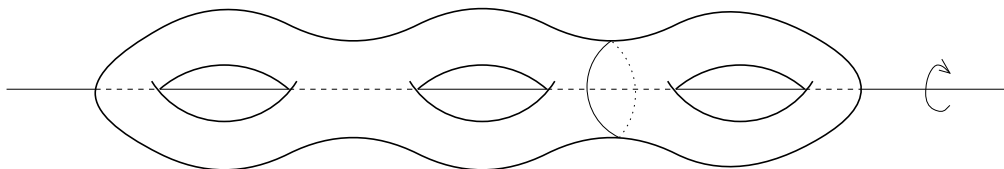


Abb. 2.1: Zerlegung

**Bemerkung.** In diesem Beispiel ist zwar  $p = 2$ , doch die Konstruktion geht trotzdem, weil die invarianten essentiellen trennenden Kreise keine Fixpunkte enthalten.

Weniger anschaulich, dafür aber rechnerisch instruktiv, ist folgendes Beispiel: Die beiden Abbildungen

$g$	$p$	$g'$	$l$	$m_i$
1	6	0	3	2, 3, 6
2	6	0	3	3, 6, 6

ergeben zusammen

3	6	0	4	2, 3, 3, 6.
---	---	---	---	-------------

Insbesondere hat die so erhaltene Abbildung einen invarianten essentiellen trennenden Kreis.

## 2.4 Konstruktion einer Abbildung der Ordnung 3570 auf $F_{5339}$ ohne invarianten Kreis

In diesem Kapitel wird an einem konkreten Beispiel aufgezeigt, dass nicht jede Abbildung einen invarianten Kreis hat. Die hier erarbeiteten Techniken sind aber nicht auf dieses spezielle Beispiel beschränkt. Dies wird im Kapitel 2.5 genutzt, um weitere Abbildungen ohne invarianten Kreis zu konstruieren.

**Satz 2.1.** *Es gibt eine periodische Abbildung  $f : F_{5339} \rightarrow F_{5339}$  der Ordnung 3570 ohne invarianten Kreis. (Vergleiche [35, Remark 2].)*

**Beweis.** Sei  $p = 3570 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$  und  $g = 5339$ . Wähle

$$g' = 0, l = 5,$$

$$m_1 = \frac{3570}{2} = 1785,$$

$$m_2 = \frac{3570}{3} = 1190,$$

$$m_3 = \frac{3570}{5} = 714,$$

$$m_4 = \frac{3570}{7} = 510,$$

$$m_5 = \frac{3570}{17} = 210.$$

Somit gilt die Riemann-Hurwitz Formel,  $m_i$  teilt  $p$ , die Menge  $\{m_1, \dots, m_5\}$  hat die ep. und  $p = \text{lcm}\{m_1, \dots, m_5\}$ . Dadurch ist bereits die Existenz einer periodischen Abbildung der Ordnung 3570 auf  $F_{5339}$  gesichert. Wir wollen nun aber zeigen, dass eine Abbildung ohne invarianten Kreis existiert. Dazu definieren wir die Monodromie-Darstellung

$$\theta : \pi_1(S^2 - \{y_1, \dots, y_5\}) = \langle x_1, \dots, x_5 \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_5 = 1 \rangle \rightarrow Z_{3570}$$

durch

$$\theta(x_1) := \bar{2}, \quad (\bar{\phantom{x}} \text{ bezeichnet die Restklasse in } Z_{3570})$$

$$\theta(x_2) := \bar{3},$$

$$\theta(x_3) := \bar{5},$$

$$\theta(x_4) := \bar{7},$$

$$\theta(x_5) := \overline{-17} = \overline{3553}.$$

Kontrolliere, dass  $\theta$  ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Die  $x_1, \dots, x_5$  entsprechen kleinen orientierten Kreisen  $\gamma_1, \dots, \gamma_5$  um fünf verschiedene Punkte  $y_1, \dots, y_5$  auf  $S^2$ . Die Orientierung der Kreise wird dabei durch die Orientierung auf  $S^2$  bestimmt.

$\theta(x_i)$  hat nach Konstruktion die Ordnung  $m_i$  in  $Z_{3570}$ . Weiter induziert  $\theta$  eine 3570-blättrige zyklische verzweigte Überlagerung  $q : F_{5339} \rightarrow S^2$  mit Verzweigungspunkten  $B := \{y_1, \dots, y_5\}$  und Indizes  $\{m_1, \dots, m_5\}$ . Davon überzeugt man sich folgendermassen: Gemäss der allgemeinen Theorie, beschrieben in Kapitel 1.1, induziert  $\theta$  eine unverzweigte 3570-blättrige zyklische Überlagerung  $\tilde{q} : F_j - k \text{ Punkte} \rightarrow S^2 - B$ . Dabei ist vorläufig  $j$  und  $k$  noch unbekannt. Nach Wahl von  $\theta$  ist  $k = 34 = \sum_{i=1}^5 \frac{p}{m_i}$ . Betrachtung der Euler-Charakteristik liefert  $2 - 2j - 34 = 3570(2 - 5)$ . Daraus folgt  $j = 5339$  und  $\tilde{q}$  kann zu  $q$  ergänzt werden. Die 34 Punkte entsprechen dabei  $q^{-1}(B)$ .

Die zu  $\tilde{q}$  gehörende zyklische Gruppe der Decktransformationen hat also die Ordnung 3570 und wird erzeugt von einer periodischen Abbildung  $F_{5339} - q^{-1}(B) \rightarrow F_{5339} - q^{-1}(B)$ , die sich zur gesuchten Abbildung  $f : F_{5339} \rightarrow F_{5339}$  erweitern lässt. Beachte, dass der Erzeuger der Decktransformationsgruppe nicht eindeutig festgelegt ist und deshalb auch  $f$  durch  $\theta$  nur bis auf Konjugation einer primitiven Potenz (d.h. einer Potenz teilerfremd zu  $p$ ) bestimmt ist. Weiter ist die durch  $f$  induzierte Quotientenabbildung  $F_{5339} \rightarrow F_{5339}/\langle f \rangle$  isomorph zu  $q : F_{5339} \rightarrow S^2$ .

Warum hat nun aber  $f$  keinen invarianten Kreis? Entscheidend ist die Anwendung von [35, Lemma 2]. Dieses besagt, dass für einen unter  $f$  invarianten Kreis  $C$  auf  $F_g$  folgende zwei Aussagen gelten:  $q(C)$  ist ein Kreis in  $S^2 - B$  und  $\theta([q(C)])$  erzeugt  $Z_p$ .

Die Idee ist jetzt zu zeigen, dass kein Kreis  $\bar{C}$  in  $S^2 - B$  (bzw.  $[\bar{C}]_{\pi_1(S^2 - B)}$ ) durch  $\theta$  auf einen Erzeuger von  $Z_{3570}$  abgebildet wird. Dazu muss man natürlich wissen, welche Elemente in  $\pi_1(S^2 - B) = \langle x_1, \dots, x_5 \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_5 = 1 \rangle$  überhaupt durch einen Kreis repräsentiert werden können. Weil  $\text{im}(\theta) = Z_{3570}$  abelsch ist, induziert  $\theta$  eine Abbildung

$$\tilde{\theta} : H_1(S^2 - B) = \pi_1(S^2 - B)/[\pi_1(S^2 - B), \pi_1(S^2 - B)] \twoheadrightarrow Z_{3570}$$

mit

$$\tilde{\theta}([\gamma]_{H_1(S^2 - B)}) = \theta([\gamma]_{\pi_1(S^2 - B)}).$$

Es genügt deshalb, sich zu fragen, welche Elemente in  $H_1(S^2 - B)$  durch einen Kreis repräsentiert werden können. Diese Frage wird in [23, Theorem 1] beantwortet: Genau die Elemente der Form

$$\pm \sum_{i=1}^4 [\tilde{\gamma}_i]_{H_1(S^2 - B)}$$

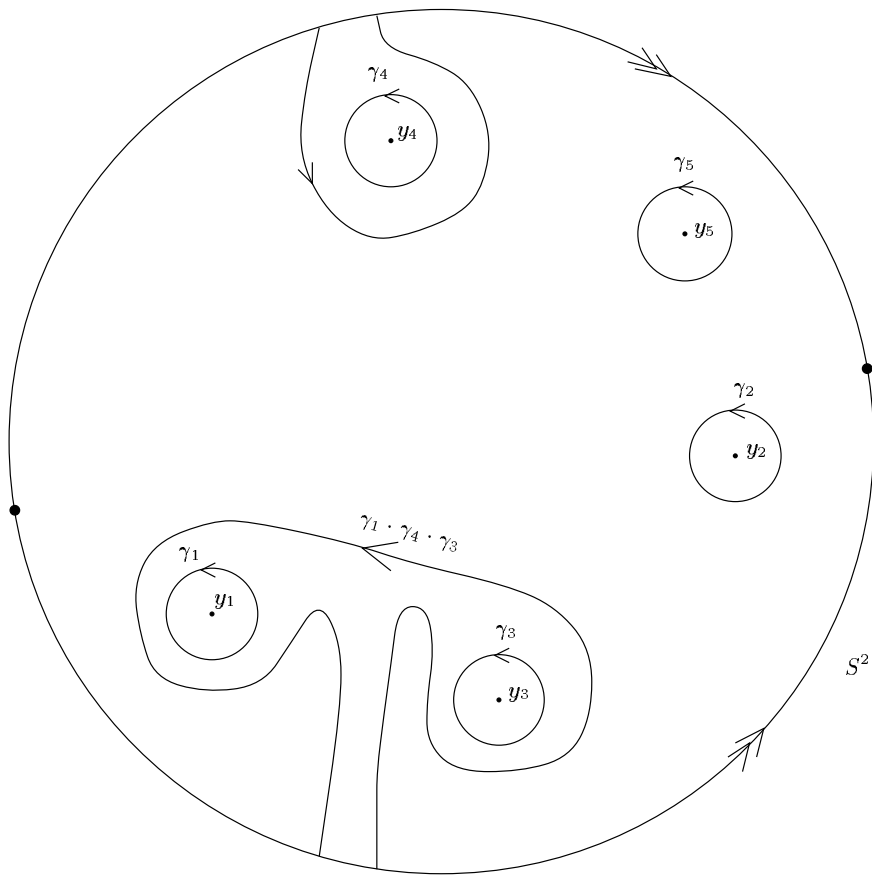


Abb. 2.2:  $\gamma_1 \cdot \gamma_4 \cdot \gamma_3$

können durch einen Kreis repräsentiert werden (vergleiche Abb. 2.2). (Dabei schreiben wir die Homologiegruppe und  $Z_p$  additiv, die Fundamentalgruppe multiplikativ,  $\gamma_i$  ist wie vorher definiert,  $[\check{\gamma}_i] \in \{[0], [\gamma_i]\}$  und  $\check{x}_i \in \{1, x_i\}$ .)

Wir zeigen jetzt, dass für alle möglichen Kombinationen der Ausdruck

$$\tilde{\theta} \left( \pm \sum_{i=1}^4 [\check{\gamma}_i]_{H_1(S^2-B)} \right) = \theta \left( \left( \prod_{i=1}^4 \check{x}_i \right)^{\pm 1} \right)$$

kein Erzeuger von  $Z_{3570}$  ist (daraus folgt die Behauptung):

$$\begin{aligned} \theta(1) &= \bar{0}, \\ \theta(x_1) &= \bar{2}, \\ \theta(x_2) &= \bar{3}, \\ \theta(x_3) &= \bar{5}, \\ \theta(x_4) &= \bar{7}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta(x_1 \cdot x_2) &= \overline{5}, \\
\theta(x_1 \cdot x_3) &= \overline{7}, \\
\theta(x_1 \cdot x_4) &= \overline{9} = \overline{3} \cdot \overline{3}, \\
\theta(x_2 \cdot x_3) &= \overline{8} = \overline{2} \cdot \overline{4}, \\
\theta(x_2 \cdot x_4) &= \overline{10}, \\
\theta(x_3 \cdot x_4) &= \overline{12} = \overline{6} \cdot \overline{2}, \\
\theta(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) &= \overline{10}, \\
\theta(x_1 \cdot x_2 \cdot x_4) &= \overline{12} = \overline{6} \cdot \overline{2}, \\
\theta(x_1 \cdot x_3 \cdot x_4) &= \overline{14}, \\
\theta(x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) &= \overline{15}, \\
\theta(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) &= \overline{17}.
\end{aligned}$$

Die fettgedruckten Zahlen sind Teiler von  $p = 3570$ . Die Bilder der Inversen haben die gleichen Eigenschaften, z.B. ist  $\theta((x_1 \cdot x_3)^{-1}) = \overline{-7} = \overline{3563}$  auch durch 7 teilbar.  $\square$

## 2.5 Abbildungen ohne invarianten Kreis

Die Suche nach Abbildungen ohne invarianten Kreis erfolgt in diesem Kapitel getrennt nach der Anzahl Verzweigungspunkte. Für  $l = 3$  werden dabei zuerst ganz spezielle Beispiele konstruiert. Daraus kann man aber bereits einige allgemeine Ergebnisse herleiten, nämlich die Sätze 2.2, 2.3 und 2.4.

Notwendige Bedingungen für die Existenz einer periodischen Abbildung  $f$  ohne invarianten Kreis im Fall I sind (vergleiche Kapitel 1.3.1):

- $g' = 0$  [22, Structure Theorem]
- $l \geq 3$  (folgt mit der Riemann-Hurwitz Formel aus  $g' = 0$ )
- $m_i \neq p$ , d.h. es gibt keine Fixpunkte (weil sonst  $\theta(x_i)$  die Ordnung  $p$  in  $Z_p$  hat, also  $Z_p$  erzeugt)
- $m_i \mid p$
- Riemann-Hurwitz Formel:  $\frac{2g-2}{p} = 2g' - 2 + \sum_{i=1}^l (1 - \frac{1}{m_i})$
- $\text{lcm}(m_1, \dots, \widehat{m_i}, \dots, m_l) = \text{lcm}(m_1, \dots, m_l) = p$  für alle  $i = 1, \dots, l$
- Existenz von  $\theta : \langle x_1, \dots, x_l \mid x_i^{m_i} = 1, x_1 \cdot \dots \cdot x_l = 1 \rangle \twoheadrightarrow Z_p$ , so dass  $\theta(x_i)$  die Ordnung  $m_i$  in  $Z_p$  hat. Weiter dürfen alle  $\theta(\tilde{x}_1 \cdot \dots \cdot \tilde{x}_l)$  die Gruppe  $Z_p$  nicht erzeugen, wobei  $\tilde{x}_i \in \{1, x_i\}$  ist.

**Bemerkung.** Diese Bedingungen sind auch hinreichend. Dabei erfolgt die Konstruktion völlig analog wie im Kapitel 2.4.

**Notation.** Wie immer sei  $r_i = \frac{p}{m_i}$ .

### 2.5.1 $l = 3$

Für  $l = 3$  fordert man insbesondere

- $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_1$ , denn z.B. aus  $m_1 = m_2$  folgt der Widerspruch  $p = \text{lcm}(m_1, m_2) = m_1$ .
- $\text{gcd}(r_i, r_j) = 1$  für  $i \neq j$ , denn sonst folgt  $\text{lcm}(m_i, m_j) < p$ . Widerspruch.

### 2.5.2 $l = 3$ , Konstruktion vom Typ $r_3 = r_1 + r_2$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $r_1 < r_2 < r_3$ . Wähle bzw. definiere:

- ★  $1 < r_1 < r_2$  mit  $\text{gcd}(r_1, r_2) = 1$  ( $\Rightarrow m_i \neq p$ )
- ★  $r_3 := r_1 + r_2$  ( $\Rightarrow \text{gcd}(r_1, r_3) = 1, \text{gcd}(r_2, r_3) = 1$ )
- ★  $p := r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$  ( $\Rightarrow m_i | p, \text{lcm}(m_1, m_2) = \text{lcm}(m_1, m_3) = \text{lcm}(m_2, m_3) = \text{lcm}(m_1, m_2, m_3) = p$ )
- ★  $g := 1 + \frac{p}{2} - r_3$  ( $\Rightarrow$  R-H)
- ★  $\theta(x_1) := r_1$   
 $\theta(x_2) := r_2$   
 $\theta(x_3) := -r_3 \pmod{p}$

Daraus folgt, dass  $\theta(x_i)$  die Ordnung  $m_i$  in  $Z_p$  hat,  $\theta(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) = 0$  ist, und  $\theta(x_1), \theta(x_2), \theta(x_3), \theta(x_1 \cdot x_2) = r_3, \theta(x_1 \cdot x_3) = -r_2, \theta(x_2 \cdot x_3) = -r_1$  alle  $Z_p$  nicht erzeugen.

### Beispiele.

$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$g$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
30	2	3	5	11	15	10	6
70	2	5	7	29	35	14	10
126	2	7	9	55	63	18	14
198	2	9	11	89	99	22	18
84	3	4	7	36	28	21	12
120	3	5	8	53	40	24	15
210	3	7	10	96	70	30	21
180	4	5	9	82	45	36	20

### 2.5.3 $l = 3$ , Variante von 2.5.2

Statt  $p = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$  kann man auch  $p = k \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$  setzen, für ein beliebiges  $k \in \mathbf{N}$ . Weiterhin sind alle Bedingungen erfüllt und man erhält aus jedem der vorher aufgelisteten Beispiele eine Fülle von neuen Beispielen:

$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$g$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
60	2	3	5	26	30	20	12
90	2	3	5	41	45	30	18
120	2	3	5	56	60	40	24
150	2	3	5	71	75	50	30
180	2	3	5	86	90	60	36
210	2	3	5	101	105	70	42
140	2	5	7	64	70	28	20
210	2	5	7	99	105	42	30
168	3	4	7	78	56	42	24

Insbesondere gilt folgender Satz:

**Satz 2.2.** *Es gibt unendlich viele  $F_g$ , die ein  $f$  ohne invarianten Kreis zulassen, denn wir können z.B. folgende  $g$  wählen:*

$g = -4 + 15k, (k \in \mathbf{N}),$	$(r_1, r_2, r_3) = (2, 3, 5),$
$g = -6 + 35k,$	$(r_1, r_2, r_3) = (2, 5, 7),$
$g = -8 + 63k,$	$(r_1, r_2, r_3) = (2, 7, 9),$
$g = -10 + 99k,$	$(r_1, r_2, r_3) = (2, 9, 11),$
$g = -6 + 42k,$	$(r_1, r_2, r_3) = (3, 4, 7),$
$g = -7 + 60k,$	$(r_1, r_2, r_3) = (3, 5, 8),$
$g = -9 + 105k,$	$(r_1, r_2, r_3) = (3, 7, 10),$
$g = -8 + 90k,$	$(r_1, r_2, r_3) = (4, 5, 9).$

Insgesamt findet man so 259 verschiedene  $g \leq 1000$ . Die nächste Tabelle ergänzt diese Aussage bis  $g = 5000$ . Dabei bedeutet z.B. die Zeile 100, 16, 16.0, dass in den bisher betrachteten Fällen, also in den speziell konstruierten Beispielen mit  $l = 3$ , total 16 verschiedene  $F_g$  ( $g \leq 100$ ) existieren, die ein  $f$  ohne invarianten Kreis besitzen. 16.0 beziffert den prozentualen Anteil.

$g \leq$	$\#g$	%
100	16	16.0
200	38	19.0
300	63	21.0



400	85	21.3
500	113	22.6
600	141	23.5
700	170	24.3
800	198	24.8
900	230	25.6
1000	259	25.9
1500	400	26.7
2000	550	27.5
2500	693	27.7
3000	850	28.3
3500	1011	28.9
4000	1160	29.0
4500	1309	29.1
5000	1481	29.6

Interessant ist, dass einige  $g$  von mehreren verschiedenen Folgen erreicht werden, z.B. ist  $131 = -4 + 15 \cdot 9 = -12 + 143 \cdot 1$ . Das hat zur Folge, dass für diese  $g$  mehrere "verschiedene" Abbildungen  $f_j : F_g \rightarrow F_g$  ohne invarianten Kreis existieren. Dabei verstehen wir hier und im Folgenden unter der Aussage " $f_1$  ist verschieden von  $f_2$ ", dass  $f_1$  weder zu  $f_2$  noch zu einer Potenz von  $f_2$  konjugiert ist. Einen Beweis dafür, dass die genannten  $f_j$  tatsächlich verschieden sind, findet man im Kapitel 2.7.

Auf diese Weise erhält man 29 verschiedene  $F_g$  ( $g \leq 1000$ ), die zwei verschiedene  $f$  ohne invarianten Kreis zulassen, z.B. wie erwähnt  $F_{131}$ . Auf  $F_{386}$  und  $F_{914}$  existieren sogar je drei verschiedene Abbildungen ohne invarianten Kreis.

$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$g$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
270	2	3	5	131	135	90	54
286	2	11	13	131	143	26	22
780	2	3	5	386	390	260	156
792	2	9	11	386	390	260	156
792	3	8	11	386	264	99	72
1848	3	8	11	914	616	231	168
1848	4	7	11	914	462	264	168
1870	5	17	22	914	374	110	85

**Satz 2.3.** *Es gibt unendlich viele  $g$  mit zwei verschiedenen  $f : F_g \rightarrow F_g$  ohne invarianten Kreis, nämlich:*

$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$g$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
$420k$	2	5	7	$-6 + 210k$	$210k$	$84k$	$60k$
$420k$	3	4	7	$-6 + 210k$	$140k$	$105k$	$60k$

Diese Aussage lässt sich weiter verallgemeinern, z.B. gilt: Es gibt unendlich viele  $g$  mit *sieben* verschiedenen  $f : F_g \rightarrow F_g$  ohne invarianten Kreis.

$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$g$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
$6126120k$	2	15	17	$-16 + 3063060k$	$3063060k$	$408408k$	$360360k$
$6126120k$	3	14	17	$-16 + 3063060k$	$2042040k$	$437580k$	$360360k$
$6126120k$	4	13	17	$-16 + 3063060k$	$1531530k$	$471240k$	$360360k$
$6126120k$	5	12	17	$-16 + 3063060k$	$1225224k$	$510510k$	$360360k$
$6126120k$	6	11	17	$-16 + 3063060k$	$1021020k$	$556920k$	$360360k$
$6126120k$	7	10	17	$-16 + 3063060k$	$875160k$	$612612k$	$360360k$
$6126120k$	8	9	17	$-16 + 3063060k$	$765765k$	$680680k$	$360360k$

Die letzte Aussage und Satz 2.3 sind nach folgendem Rezept konstruiert:

- ★ Wähle  $r_3 = \nu$  prim ( $\nu \geq 7$ )
- ★ Es gibt  $(\nu-3)/2$  Zerlegungen  $r_1+r_2 = r_3$ , die den Anforderungen genügen, nämlich  $2 + (\nu-2) = \nu$ ,  $3 + (\nu-3) = \nu, \dots, \frac{\nu-1}{2} + \frac{\nu+1}{2} = \nu$
- ★  $p := \text{lcm}(2 \cdot (\nu-2) \cdot \nu, \dots, \frac{\nu-1}{2} \cdot \frac{\nu+1}{2} \cdot \nu) \cdot k$
- ★  $g := 1 + \frac{p}{2} - \nu$

Deshalb erhalten wir folgenden Satz:

**Satz 2.4.** *Zu jeder vorgegebenen Schranke  $s$  findet man ein  $t > s$  (beispielsweise  $t = (\nu-3)/2$  für ein  $\nu > 2s+3$  prim), so dass auf unendlich vielen  $F_g$  (mindestens)  $t$  verschiedene  $f$  ohne invarianten Kreis existieren.*

**Bemerkungen.** In den wie oben konstruierten Beispielen haben die verschiedenen  $f$  überdies jeweils dieselbe Ordnung  $p$ .

Die Aussage, dass auf einer gegebenen Fläche  $m$  verschiedene  $f$  ohne invarianten Kreis existieren, bedeutet immer, dass *mindestens*  $m$  solche  $f$  existieren. Es ist ja durchaus denkbar, dass auf der Fläche weitere Abbildungen ohne invarianten Kreis gefunden werden können, z.B. falls man die sehr speziellen Bedingungen  $l=3$  oder  $r_3 = r_1 + r_2$  fallen lässt. Dies wird in den nächsten Kapiteln untersucht. Abgesehen davon hat mit  $f$  auch jede Abbildung  $hf^r h^{-1}$  (für einen Diffeomorphismus  $h : F_g \rightarrow F_g$  und  $\text{gcd}(r, p) = 1$ ) keinen invarianten Kreis, siehe Satz 2.27 auf Seite 67.

**Bemerkung.** In den bisherigen Beispielen ohne invarianten Kreis findet man keine  $g$  von der Form  $g = \nu + 1$  ( $\nu$  prim).

*Beweis.* Aus der Riemann-Hurwitz Formel folgt  $2g - 2 = p - r_1 - r_2 - r_3 = p - 2r_3 = kr_1r_2r_3 - 2r_3 = (kr_1r_2 - 2)r_3$ .

Annahme:  $g = \nu + 1$  ( $\nu$  prim)

$$\Rightarrow 2g - 2 = 2\nu \Rightarrow (kr_1r_2 - 2)r_3 = 2\nu.$$

$$r_3 \neq 2 \Rightarrow r_3 = \nu, kr_1r_2 - 2 = 2 \Rightarrow kr_1r_2 = 4.$$

$$r_1, r_2 \geq 2 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2. \text{ Widerspruch.} \quad \square$$

Man könnte jetzt vermuten, dass jede Abbildung  $f : F_g \rightarrow F_g$  einen invarianten Kreis hat, falls  $g = \nu + 1$  ( $\nu$  prim) ist. Dies würde sofort Meeks' Conjecture beweisen. Allerdings erweist sich unsere Vermutung als falsch, denn im nächsten Kapitel finden wir z.B. eine Abbildung auf  $F_{38}$  ohne invarianten Kreis (37 ist eine Primzahl).

#### 2.5.4 $l = 3$ , allgemeiner Fall

Verzichtet man auf die künstliche Forderung  $r_3 = r_1 + r_2$ , ergeben sich weitere Beispiele ohne invarianten Kreis (überprüfe, dass  $\theta$  die Bedingungen erfüllt):

Es folgt eine komplette Auflistung aller Beispiele ohne invarianten Kreis für  $l = 3$ ,  $g \leq 100$ . Für die Wahl von  $\theta$  sind natürlich mehrere Möglichkeiten zulässig. Dies wird in den ersten beiden Beispielen angedeutet. Die verschiedenen Konstruktionen von  $\theta$  entsprechen dabei den primitiven Potenzen von  $f$ , wie aus der letzten Spalte ersichtlich ist. Mit dem ersten Beispiel wird gleichzeitig auch [22, Proposition 1(2)] bestätigt.

$g$	$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$\theta(x_1)$	$\theta(x_2)$	$\theta(x_3)$	$f^j$
11	30	2	3	5	2	3	25	1
					26	9	25	7
					22	3	5	11
					14	21	25	13
					16	9	5	17
					8	27	25	19
					4	21	5	23
					28	27	5	29
16	42	2	3	7	2	33	7	1
					34	15	35	5
					4	3	35	11
					26	9	7	13
					10	39	35	17

					20	15	7	19
					22	27	35	23
					32	3	7	25
					16	33	35	29
					38	39	7	31
					8	27	7	37
					40	9	35	41
25	60	3	4	5	3	32	25	
26	60	2	3	5	2	3	55	
26	66	2	3	11	2	9	55	
29	70	2	5	7	2	5	63	
31	78	2	3	13	2	63	13	
36	84	3	4	7	3	4	77	
37	84	2	3	7	2	33	49	
38	90	2	5	9	2	25	63	
41	90	2	3	5	2	3	85	
41	102	2	3	17	2	15	85	
46	105	3	5	7	3	25	77	
46	114	2	3	19	2	93	19	
47	110	2	5	11	2	75	33	
53	120	3	5	8	3	5	112	
55	120	3	4	5	21	4	95	
55	126	2	7	9	2	7	117	
56	120	2	3	5	2	3	115	
56	130	2	5	13	2	115	13	
56	138	2	3	23	2	21	115	
58	126	2	3	7	2	33	91	
58	132	3	4	11	51	4	77	
59	132	2	3	11	2	9	121	
61	150	2	3	25	2	123	25	
63	140	4	5	7	4	45	91	
64	140	2	5	7	2	5	133	
68	154	2	7	11	2	119	33	
69	156	3	4	13	9	4	143	

70	156	2	3	13	2	63	91
71	150	2	3	5	2	3	145
71	174	2	3	2	2	27	145
74	165	3	5	11	3	85	77
74	170	2	5	17	2	15	153
76	168	3	7	8	3	77	88
76	186	2	3	31	2	153	31
78	168	3	4	7	3	4	161
79	168	2	3	7	2	33	133
81	182	2	7	13	2	63	117
82	180	4	5	9	4	5	171
83	180	2	5	9	2	25	153
83	190	2	5	19	2	55	133
85	180	3	4	5	21	4	155
86	180	2	3	5	2	3	175
86	210	2	3	35	2	33	175
88	195	3	5	13	3	10	182
89	198	2	9	11	2	9	187
91	204	3	4	17	81	4	119
91	222	2	3	37	2	183	37
92	198	2	3	11	8	3	187
92	204	2	3	17	2	15	187
92	210	2	5	21	2	145	63
94	210	2	7	15	2	133	75
95	210	3	5	14	3	25	182
96	210	3	7	10	3	7	200
97	210	5	6	7	5	72	133
99	210	2	5	7	2	5	203
100	210	2	3	7	2	33	175

Als Nächstes folgt eine Tabelle der Anteile bis  $g \leq 1000$  für den hier betrachteten Fall mit drei Verzweigungspunkten (vergleiche die entsprechende Tabelle auf Seite 46). Man kann dieser Tabelle zum Beispiel entnehmen, dass auf genau 98 verschiedenen  $F_g$  mit  $701 \leq g \leq 800$  eine Abbildung ohne invarianten Kreis mit drei Verzweigungspunkten existiert.

$g \leq$	$\#g$	%
100	43	43.0
200	119	59.5
300	200	66.7
400	290	72.5
500	383	76.6
600	478	79.7
700	574	82.0
800	672	84.0
900	766	85.1
1000	861	86.1

Nicht erreicht werden  $g = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 57, 60, 62, 65, 66, 67, 72, 73, 75, 77, 80, 84, 87, 90, 93, 98, 104, 105, 108, 110, 111, 112, 114, 123, 127, 129, 132, 138, 139, 141, 149, 150, 153, 165, 167, 174, 180, 189, 192, 195, 207, 210, 213, 219, 228, 230, 232, 238, 240, 249, 255, 258, 264, 269, 275, 277, 279, 282, 294, 312, 315, 335, 339, 342, 357, 358, 363, 390, 392, 420, 428, 439, 450, 472, 474, 480, 513, 543, 572, 588, 594, 637, 657, 665, 687, 759, 798, 804, 813, 825, 863, 864, 870, 930, 948, 968, 987, 990$ . Das bedeutet also, dass für jedes  $g$  aus dieser Liste alle  $f : F_g \rightarrow F_g$  mit  $l = 3$  Verzweigungspunkten einen invarianten Kreis haben. Später werden wir aber für viele der aufgezählten  $g$  eine Abbildung  $f : F_g \rightarrow F_g$  ohne invarianten Kreis finden (natürlich mit  $l \neq 3$ ), was schlussendlich zum Satz 2.5 führen wird.

**Bemerkung.** In allen Beispielen war  $p > O(g)$  (definiert auf Seite 33) und  $m_i \neq p$ . Aus Satz 2.9 auf Seite 59 folgt, dass  $f$  keinen invarianten Kreis hat, d.h. wir hätten  $\theta$  gar nicht explizit konstruieren müssen.

Umgekehrt kann man bei der Suche nach Abbildungen ohne invarianten Kreis mit  $l = 3$  immer  $g' = 0$ ,  $m_i \neq p$  und  $p > O(g)$  annehmen ( $g' = 0$  folgt aus [22, Structure Theorem],  $m_i \neq p$  aus Lemma 2.8 und  $p > O(g)$  aus Satz 2.11).

### 2.5.5 Bemerkung zur Programmierung

Im Kapitel 2.5 sind die meisten Tabellen, die Abbildungen ohne invariante Kreise beschreiben, mit dem Computer berechnet worden. Als Programmiersprache haben wir C++ oder Maple benutzt. Im Anhang wird dazu je ein Beispiel im einfachsten Fall  $l = 3$  angegeben. Zu Beginn von Kapitel 2.5 sind die notwendigen Bedingungen für die Existenz einer Abbildung ohne invarianten Kreis aufgeführt. Die Idee bei der Programmierung besteht einfach darin, bei gegebenem  $l \geq 3$  und nach oben beschränktem  $g$  alle möglichen Werte für  $p$ ,  $m_i$  und  $\theta(x_i)$  auf diese Bedingungen zu testen. Die Programme sind deshalb vorwiegend aus **for**-Schleifen bzw. **if**-Anweisungen zusammengesetzt. Natürlich kann die Laufzeit verkürzt werden, wenn man bekannte Informationen über die Variablen einbaut. Konkret braucht man z.B. mit [22, Theorem 2(1)] nur diejenigen  $p$  zu testen, die mindestens drei Primfaktoren besitzen. Mit zunehmendem  $l$  nimmt die Länge der Programme und damit auch die Laufzeit stark zu, vor allem die Bedingungen an  $\theta$  verursachen für grosses  $l$  einen riesigen Programmieraufwand. Die Laufzeit steigt auch an, wenn  $g$  zunimmt, weil dann  $p$  und damit  $m_i$  mehr mögliche Werte annehmen können. In den Kapiteln 2.5.4 und 2.5.7 bis 2.5.10 haben wir uns deshalb auf  $g \leq 1000$  beschränkt. Um z.B. für  $g \leq 10000$  eine analoge Aussage wie in Satz 2.5 zu erzielen, muss man mit einer totalen Laufzeit von mehreren Tagen rechnen (ausser man findet eine effizientere Programmierung oder hat Zugriff auf einen Hochleistungsrechner).

### 2.5.6 $l \geq 4$ , Spezialfall $r_l = r_1 + \dots + r_{l-1}$

Fordert man  $r_l = r_1 + \dots + r_{l-1}$  und  $p = r_1 \cdot \dots \cdot r_l$ , liefert der Computer für  $l = 5$  bzw. 4 die folgenden Beispiele, die jedoch alle ein grosses  $p$  und  $g$  besitzen:

$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$g$	$m_i = \frac{p}{r_i}$
3570	2	3	5	7	17	5339	
11880	2	3	3	22	30	17791	
20520	2	3	3	30	38	30743	
23100	3	4	7	11	25	34626	
24570	2	5	7	13	27	36829	
26250	2	3	5	25	35	39341	
32670	3	3	5	22	33	48973	
33810	2	3	7	23	35	50681	
38850	2	3	7	25	37	58239	

**Bemerkung.** Das oberste Beispiel in der letzten Tabelle wird in [35, Remark 2] erwähnt und in Kapitel 2.4 untersucht.

$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$g$	$m_i = \frac{p}{r_i}$
4500	2	3	25	30	4471	
6300	2	3	30	35	6266	
9900	3	5	22	30	9871	
12600	4	5	21	30	12571	
17100	3	5	30	38	17063	
17640	3	4	35	42	17599	
19404	2	7	33	42	19363	
19800	2	3	55	60	19741	

**Bemerkung.** Für alle in den Fällen  $l = 4$  und  $5$  aufgezählten Beispiele ist  $p < O(g)$ , Satz 2.9 kann also nicht benutzt werden. Doch auch hier sind analoge Aussagen wie im Abschnitt 2.5.3 möglich, z.B. gibt es unendlich viele  $F_g$ , die zwei verschiedene  $f$  der Ordnung  $p < g < O(g)$  ohne invarianten Kreis zulassen:

$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$g$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$
$24150k$	2	3	5	25	35	$36191 + 36225k$	$12075k$	$8050k$	$4830k$	$966k$	$690k$
$24150k$	2	3	7	23	35	$36191 + 36225k$	$12075k$	$8050k$	$3450k$	$1050k$	$690k$

Mit der Forderung  $r_l = r_1 + \dots + r_{l-1}$  ist natürlich die Wahl  $\theta(x_1) = r_1, \dots, \theta(x_{l-1}) = r_{l-1}, \theta(x_l) = -r_l \pmod{p}$  verbunden. Dadurch bekommt man das Problem programmiertechnisch ziemlich gut in den Griff.

Durch eine leichte Modifikation der vorher tabellierten Beispiele erhält man wiederum viele neue Beispiele ohne invarianten Kreis. Wir nützen hierbei aus, dass gewisse  $r_i$  gemeinsame Teiler haben und dadurch  $p$  und  $g$  verkleinert werden können:

$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$g$	$m_i = \frac{p}{r_i}$
330	3	3	5	22	33	463	
330	2	3	3	22	30	466	
570	2	3	3	30	38	818	
660	3	3	5	22	33	958	
660	2	3	3	22	30	961	



$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$g$	$m_i = \frac{p}{r_i}$
150	2	3	25	30	121	
210	2	3	30	35	176	
300	2	3	25	30	271	
330	3	5	22	30	301	
420	3	4	35	42	379	
420	4	5	21	30	391	

### 2.5.7 $l = 4$ , allgemeiner Fall

Für  $l = 4$  existieren viele Beispiele ohne invarianten Kreis mit  $r_4 \neq r_1 + r_2 + r_3$ . Hier diejenigen mit einem  $g \leq 100$ , das für  $l = 3$  nicht angenommen wurde:

$g$	$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$\theta(x_1)$	$\theta(x_2)$	$\theta(x_3)$	$\theta(x_4)$	$f^j$
23	30	3	3	5	5	3	27	5	25	1
						9	21	5	25	7
						3	27	25	5	11
						21	9	5	25	13
						9	21	25	5	17
						27	3	5	25	19
						21	9	25	5	23
24	30	2	2	5	5	4	16	5	5	
24	30	2	2	5	5	4	16	5	5	
33	42	3	3	7	7	3	39	7	35	
34	42	2	2	7	7	2	26	7	7	
40	60	3	4	5	30	33	32	25	30	
52	60	4	4	5	5	4	16	5	35	
54	66	2	2	11	11	4	40	11	11	
57	84	3	4	7	42	3	4	35	42	
62	70	2	2	7	7	18	38	7	7	
75	84	2	4	7	7	2	68	7	7	
77	90	5	5	9	9	5	25	9	81	
80	84	2	2	3	3	2	58	33	75	
84	90	2	2	5	5	4	76	5	5	
93	114	3	3	19	19	3	111	19	95	
98	110	2	2	11	11	4	84	11	11	

Die aktualisierte Verteilungstabelle präsentiert sich nun wie folgt (berücksichtigt sind hier also alle existierenden Beispiele mit  $l = 3$  und  $l = 4$ ; vergleiche wiederum die analogen Tabellen auf den Seiten 46 und 52):

$g \leq$	$\#g$	%
100	58	58.0
200	155	77.5
300	254	84.7
400	354	88.5
500	454	90.8
600	554	92.3
700	654	93.4
800	754	94.3
900	854	94.9
1000	954	95.4

Nur 47 verschiedene  $g$  ( $0 \leq g \leq 1000$ ) konnten bisher nicht erreicht werden und zwar  $g = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 27, 28, 30, 32, 35, 39, 42, 43, 44, 45, 48, 49, 50, 51, 60, 65, 66, 67, 72, 73, 87, 90, 105, 138, 165, 277$ .

### 2.5.8 $l = 5$ , allgemeiner Fall

Das kleinste Geschlecht, das eine Abbildung mit fünf Verzweigungspunkten ohne invarianten Kreis zulässt, ist  $g = 55$ . Unter anderem findet man auch Abbildungen ohne invarianten Kreis auf  $F_{67}$ ,  $F_{138}$ ,  $F_{165}$  und  $F_{277}$ . Das ist erwähnenswert, weil auf diesen Flächen jedes  $f$  mit  $l = 3$  oder  $l = 4$  jeweils einen invarianten Kreis besitzt.

$g$	$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$\theta(x_1)$	$\theta(x_2)$	$\theta(x_3)$	$\theta(x_4)$	$\theta(x_5)$
55	60	3	4	5	30	30	3	32	25	30	30
67	60	4	4	5	5	30	4	16	5	5	30
138	120	5	5	8	8	60	5	95	16	64	60
165	140	4	4	7	7	70	4	24	21	21	70
277	210	5	10	14	14	35	5	100	28	112	175

Ausser für  $g = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 27, 28, 30, 32, 35, 39, 42, 43, 44, 45, 48, 49, 50, 51, 60, 65, 66, 72, 73, 87, 90, 105$  haben wir also für alle  $g \leq 1000$  eine Abbildung ohne invarianten Kreis gefunden.

### 2.5.9 $l \geq 6$

Die Fälle  $l \geq 6$  bringen keine neuen Flächen ( $g \leq 1000$ ) mit periodischen Abbildungen ohne invarianten Kreis. Im Fall  $l = 6$  (bzw. 7, 8) ist das kleinste Geschlecht, das eine Abbildung ohne invarianten Kreis zulässt  $g = 70$  (bzw. 85, 100). Für  $l \geq 18$  ist gar keine Abbildung mit  $g' = 0$ ,  $p \geq 30$  und  $g \leq 105$  möglich. (Dies folgt direkt aus der Riemann-Hurwitz Formel.) Beachte, dass wir deswegen nur endlich viele Möglichkeiten durchtesten müssen (denn mit  $l$  und  $g$  ist auch  $p \leq 4g + 2$  beschränkt und deshalb sind nur endlich viele Kombinationen für die Wahl von  $m_i$  und  $\theta(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, l$  möglich). Aus diesem Grund ist auch der Einsatz eines Computers geeignet.

### 2.5.10 Folgerungen/Vermutung

Unter Berücksichtigung aller Beispiele ergibt sich die folgende endgültige Verteilungstabelle: (Wie erwähnt reicht es,  $3 \leq l \leq 5$  zu betrachten.)

$g \leq$	$\#g$	%
100	59	59.0
200	158	79.0
300	258	86.0
400	358	89.5
500	458	91.6
600	558	93.0
700	658	94.0
800	758	94.8
900	858	95.3
1000	958	95.8

Dies führt zu einem der Hauptergebnisse von Kapitel 2:

**Satz 2.5.** *Es gibt genau 43 verschiedene  $F_g$ ,  $g \leq 1000$ , auf denen jede Abbildung einen invarianten Kreis hat und zwar für  $g = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 27, 28, 30, 32, 35, 39, 42, 43, 44, 45, 48, 49, 50, 51, 60, 65, 66, 72, 73, 87, 90, 105$ .*

Da also für jedes  $F_g$  mit  $106 \leq g \leq 1000$  eine Abbildung ohne invarianten Kreis gefunden werden konnte, ist es naheliegend, folgende Vermutung zu formulieren:

**Vermutung 2.6.** *Es gibt genau 43 verschiedene  $F_g$ , auf denen jede Abbildung einen invarianten Kreis hat.*

**Bemerkung.** Diese Vermutung steht im Widerspruch zu Meeks' Conjecture.

Schliesslich erhält man auch den folgenden Satz:

**Satz 2.7.** *Zu jedem  $l \geq 3$  existiert eine Abbildung ohne invarianten Kreis mit genau  $l$  Verzweigungspunkten (und  $30l - 78$  singulären Punkten).*

**Beweis.** Sei  $4 \leq i \leq l$  und wähle

$g$	$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_i$
$15l - 20$	$60$	$3$	$4$	$5$	$30$

sowie

$\theta(x_1)$	$\theta(x_2)$	$\theta(x_3)$	$\theta(x_i)$	
$3$	$32$	$25$	$30,$	falls $l$ ungerade
$33$	$32$	$25$	$30,$	falls $l$ gerade ist.

□

## 2.6 Zusammenhang Fixpunkt $\leftrightarrow$ invarianter Kreis für $p > O(g)$

Sei  $f$  eine orientierungserhaltende periodische Abbildung der Ordnung  $p$  auf der orientierten geschlossenen Fläche  $F_g$  ( $g \geq 2$ ) und sei

$$O(g) = \begin{cases} 6, & g = 3 \\ 2g - 2, & g \geq 5 \text{ ungerade} \\ 2g + 2, & g \geq 2 \text{ gerade} \end{cases}$$

**Lemma 2.8.**  *$f$  hat einen Fixpunkt  $x$  genau dann, wenn  $f$  einen invarianten nicht-essentiellen Kreis  $C$  besitzt.*

**Beweis.** Sei  $x$  ein Fixpunkt von  $f$ . Die Behauptung ist geometrisch einsichtig, denn  $f$  lässt als Isometrie einen kleinen nicht-essentiellen Kreis um  $x$  mit Radius  $\epsilon$  (in der gegebenen Metrik) invariant. Eine zweite Beweismöglichkeit besteht darin, die Darstellung  $\theta$  zu verwenden. Zum Verzweigungspunkt  $q(x)$  gehört der Index  $m = p$ , weil  $x$  ein Fixpunkt ist. Sei  $\bar{C}$  ein kleiner Kreis um  $q(x)$ . Die abgeschlossene Scheibe, die von  $\bar{C}$  begrenzt wird, nennen wir  $\bar{D}$ . Wir wissen, dass  $\theta([\bar{C}])$  die Ordnung  $p$  in  $Z_p$  hat, also ein Erzeuger ist. Aus [35, Lemma 2] folgt, dass  $q^{-1}(\bar{C})$  ein invarianter Kreis von  $f$  ist. Weiter ist der Kreis  $q^{-1}(\bar{C})$  nicht-essentiell, weil er die Scheibe  $q^{-1}(\bar{D})$  begrenzt.

Umgekehrt nehmen wir an, dass  $f$  einen invarianten nicht-essentiellen Kreis  $C$  besitzt.  $C$  begrenzt eine abgeschlossene Scheibe  $D$  auf  $F_g$  und trennt  $F_g$

in  $F_g = \mathring{B} \dot{\cup} C \dot{\cup} \mathring{D}$  (mit  $\mathring{B} := F_g - D$ ). Weil  $C$  trennend ist, folgt entweder  $f(\mathring{B}) = \mathring{B}$ ,  $f(\mathring{D}) = \mathring{D}$  oder  $f(\mathring{B}) = \mathring{D}$ ,  $f(\mathring{D}) = \mathring{B}$ . Im zweiten Fall ist  $\mathring{B}$  homöomorph zu einer offenen Scheibe, also folgt  $F_g = S^2$ , was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Folglich gilt  $f(D) = D$  und der Brouwersche Fixpunktsatz impliziert, dass  $f$  einen Fixpunkt hat.  $\square$

Wir wollen nun etwas genauer untersuchen, wie sich  $f$  für  $p > O(g)$  verhält. [35, Theorem 2] besagt, dass  $f$  keinen invarianten essentiellen Kreis besitzt, wenn  $p > O(g)$  ist. Also gibt es nur zwei Möglichkeiten. Entweder hat  $f$  überhaupt keinen invarianten Kreis oder  $f$  hat einen invarianten *nicht-essentiellen* (insbesondere trennenden) Kreis. Im ersten Fall folgt mit Lemma 2.8, dass  $f$  keinen Fixpunkt hat. Hingegen folgt im zweiten Fall (ebenfalls mit Lemma 2.8), dass  $f$  einen Fixpunkt besitzt. Zusammenfassend gilt also:

**Satz 2.9.**  *$f$  habe die Ordnung  $p > O(g)$ . Dann hat  $f$  einen Fixpunkt genau dann, wenn  $f$  einen invarianten (nicht-essentiellen, trennenden) Kreis besitzt und  $f$  hat keinen Fixpunkt genau dann, wenn  $f$  keinen invarianten Kreis besitzt.*

**Korollar 2.10.**  *$f$  mit Ordnung  $p > O(g)$  habe keinen Fixpunkt. Dann ist  $p \neq q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2}$ , wobei  $q_1$  und  $q_2$  prim sind.*

*Beweis.* Nimm  $p = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2}$  an. [22, Theorem 2(1)] impliziert, dass  $f$  einen invarianten Kreis hat. Dann hat  $f$  gemäss Satz 2.9 einen Fixpunkt, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.  $\square$

**Satz 2.11.**  *$f$  habe keinen Fixpunkt. Dann ist  $p > O(g)$  genau für  $g' = 0$ ,  $l = 3$ .*

*Beweis.* Die Riemann-Hurwitz Formel lautet

$$\frac{2g-2}{p} = 2g' - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

Weil  $f$  keinen Fixpunkt hat, ist  $m_i \neq p$ , folglich

$$2 \leq m_i \leq \frac{p}{2}$$

und deshalb

$$\frac{l}{2} \leq \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \leq l \left(1 - \frac{2}{p}\right).$$

Sei nun  $p > O(g)$ . Wir wollen zuerst  $g' = 0$  zeigen.

Die Annahme  $g' \geq 2$  führt zu einem Widerspruch, denn aus der Riemann-Hurwitz Formel folgt

$$\frac{2g-2}{p} \geq 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \geq 2,$$

also

$$p \leq \frac{2g-2}{2} < O(g).$$

Analog führt die Annahme  $g' = 1$  mit der Riemann-Hurwitz Formel zu

$$\frac{2g-2}{p} = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \geq \frac{l}{2}.$$

Daraus ergibt sich

$$pl \leq 2(2g-2).$$

Falls  $l \geq 2$  ist, folgt  $p \leq 2g-2 \leq O(g)$ , also ein Widerspruch. Der Fall  $l = 1$  ist ohnehin immer ausgeschlossen (Satz 1.11). Es bleibt  $l = 0$ . Hier folgt  $(2g-2)/p = 0$ , also auch ein Widerspruch. Damit ist  $g' = 0$  gezeigt und wir müssen noch  $l = 3$  beweisen.

Mit  $g' = 0$  liefert die Riemann-Hurwitz Formel die Abschätzung

$$\frac{2g-2}{p} = -2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \geq -2 + \frac{l}{2} = \frac{l-4}{2},$$

und folglich

$$p(l-4) \leq 2(2g-2).$$

Auch hier erreicht man das Ziel mit einer Fallunterscheidung nach  $l$ . Der Fall  $l \geq 6$  kann ausgeschlossen werden, weil sonst  $p \leq 2g-2 \leq O(g)$  ist. Wegen  $g' = 0$  ist automatisch  $l \geq 3$  (Satz 1.11). Die verbleibenden möglichen Werte für  $l$  sind also  $l = 3, 4$  oder  $5$ . Wir werden  $l = 5$  und  $l = 4$  zu einem Widerspruch führen, was die erste Implikation im Satz vollständig beweist.

Wir nehmen zuerst  $l = 5$  an. In diesem Fall sieht die Riemann-Hurwitz Formel folgendermassen aus:

$$\frac{2g-2}{p} = 3 - \sum_{i=1}^5 \frac{1}{m_i}.$$

Mit der Voraussetzung  $p > O(g)$  ist sicher  $p > 2g-2$  und deshalb

$$3 - \sum_{i=1}^5 \frac{1}{m_i} < 1$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{m_i} > 2.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen:

$$m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq m_4 \leq m_5.$$

Deshalb sind nur die folgenden Kombinationen für die Indizes  $m_i$  möglich:

$$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \in \{(2, 2, 2, 2, x), (2, 2, 2, 3, 3), (2, 2, 2, 3, 4), (2, 2, 2, 3, 5)\}.$$

In jedem Fall ergibt sich ein Widerspruch: Im ersten Fall ist  $m_1 = 2 = \text{lcm}(2, 2, 2, 2) = p$  (vergleiche Satz 1.11), im Widerspruch zur Annahme, dass  $f$  keinen Fixpunkt hat. Im zweiten Fall ist  $p = \text{lcm}(2, 2, 2, 3) = 6$ ; löst man die Riemann-Hurwitz Formel nach  $g$  auf, erhält man  $g = 7/2$ , also keine ganze Zahl. Im dritten Fall ist  $\text{lcm}(2, 2, 2, 3) \neq \text{lcm}(2, 2, 2, 4)$ . Ebenso ist im vierten Fall  $\text{lcm}(2, 2, 2, 3) \neq \text{lcm}(2, 2, 2, 5)$ .

Zuletzt nehmen wir  $l = 4$  an. Die Beweisidee ist genau wie im Fall  $l = 5$ . Allerdings hat man für die Wahl der  $m_i$  mehr Möglichkeiten, weshalb die Rechnung etwas länger wird. Vollkommen analog wie vorher erhält man aus der Riemann-Hurwitz Formel:

$$\frac{2g-2}{p} = 2 - \sum_{i=1}^4 \frac{1}{m_i},$$

$$2 - \sum_{i=1}^4 \frac{1}{m_i} < 1$$

und damit

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{m_i} > 1.$$

Wiederum sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq m_4.$$

Alle möglichen Kombinationen der  $m_i$  führen zu einem Widerspruch, denn:

Annahme:  $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (2, 2, x, y)$ . Falls  $x$  gerade ist, folgt  $p = \text{lcm}(2, 2, x) = x$ . Das würde aber bedeuten, dass  $f$  einen Fixpunkt hat;  $x$  ist also ungerade. Ebenso zeigt man, dass  $y$  ungerade ist. Deshalb ist  $2x = \text{lcm}(2, 2, x) = \text{lcm}(2, 2, y) = 2y$  und somit  $x = y$ ,  $p = 2x$ . Aus der Riemann-Hurwitz Formel folgt

$$\frac{2g-2}{p} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{p} - \frac{2}{p} = 1 - \frac{4}{p},$$

also  $2g-2 = p-4$  bzw.  $2g = 2x-2$ . Deshalb ist  $g = x-1$  gerade und die Definition von  $O(g)$  liefert mit  $p = 2x = 2g+2 = O(g)$  den gewünschten Widerspruch.

Annahme:  $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (2, 3, 3, x)$ . Hier ist  $p = \text{lcm}(2, 3, 3) = 6$ . Die Bedingung  $\text{lcm}(3, 3, x) = 6$  kann wegen  $x \geq 3$  nur für  $x = 6$  erfüllt werden. Daraus ergibt sich aber der Widerspruch  $m_4 = p$ .

Analoge Betrachtungen liefern Widersprüche für die Fälle  $(m_1, m_2, m_3, m_4) \in \{(2, 3, 4, x), (2, 3, 5, x), (2, 3, 6, x), (2, 3, 7, x), (2, 3, 8, x), (2, 3, 9, x), (2, 3, 10, x), (2, 3, 11, x), (2, 4, 4, x), (2, 4, 5, x), (2, 4, 6, x), (2, 4, 7, x), (2, 5, 5, x), (2, 5, 6, x)\}$ .

Annahme:  $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (3, 3, x, y)$ . Hier hat man  $\text{gcd}(3, x) = 1 = \text{gcd}(3, y)$ , denn sonst ist  $p = \text{lcm}(3, 3, x) = x$  bzw.  $p = \text{lcm}(3, 3, y) = y$ . Folglich ist  $3x = \text{lcm}(3, 3, x) = \text{lcm}(3, 3, y) = 3y$  und somit  $x = y$ . Im Fall  $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (3, 3, 4, 4)$  folgt  $p = 12$ ,  $g = 6$ , also  $p < O(g)$ . Im Fall  $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (3, 3, 5, 5)$  folgt  $p = 15$ ,  $g = 8$ , also ebenfalls der Widerspruch  $p < O(g)$ . Auch der verbleibende Fall  $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (3, 4, 4, x)$  liefert einen Widerspruch. Damit folgt  $l = 3$  und die erste Implikation ist bewiesen.

Umgekehrt wollen wir aus  $g' = 0$ ,  $l = 3$  schliessen, dass  $p > O(g)$  ist; immer unter der Voraussetzung, dass  $f$  keinen Fixpunkt hat. Die Riemann-Hurwitz Formel

$$\frac{2g-2}{p} = 2g' - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$$

lautet mit  $l = 3$ ,  $g' = 0$ :

$$\frac{2g-2}{p} = 1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3}.$$

Weil  $f$  keinen Fixpunkt hat, ist

$$2 \leq m_i \leq \frac{p}{2} \text{ bzw. } \frac{2}{p} \leq \frac{1}{m_i} \leq \frac{1}{2}$$

und man bekommt die Abschätzung

$$\frac{2g-2}{p} \leq 1 - \frac{2}{p} - \frac{2}{p} - \frac{2}{p}.$$

Diese liefert  $2g - 2 \leq p - 6$  und somit  $p \geq 2g + 4 > O(g)$ .  $\square$

**Korollar 2.12.** *Sei  $f$  ohne Fixpunkte,  $g' = 0$  und  $l = 3$ . Dann gilt*

*i)  $p \neq q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2}$  ( $q_i$  prim).*

*ii)  $f$  hat keinen invarianten Kreis.*

**Beweis.** Aus Satz 2.11 folgt  $p > O(g)$ . Die Behauptung erhält man in i) mit Korollar 2.10, in ii) mit Satz 2.9.  $\square$

Definiere  $G_{inv} := \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 27, 28, 30, 32, 35, 39, 42, 43, 44, 45, 48, 49, 50, 51, 60, 65, 66, 72, 73, 87, 90, 105\}$ .



**Korollar 2.13.** Sei  $g \in G_{inv}$ . Jedes  $f$  der Ordnung  $p > O(g)$  hat einen Fixpunkt.

*Beweis.*  $f$  hat wegen Satz 2.5 einen invarianten Kreis. Aus Satz 2.9 folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 2.14.** Sei  $g \in G_{inv}$  und  $f$  ohne Fixpunkte. Dann gilt

- i) Es existiert ein invarianter essentieller Kreis.
- ii) Für  $p > 2g - 2$  existiert ein invarianter essentieller trennender Kreis.
- iii) Für  $p > 2$ ,  $g' = 0$  hat  $f$  einen invarianten essentiellen trennenden Kreis.
- iv)  $g' = 0$  impliziert  $l \geq 4$ .
- v)  $l = 3$  impliziert  $g' \neq 0$ .
- vi) Für  $l = 3$  ist  $p \leq \frac{2}{3}(2g - 2)$ .

*Beweis.* i) Aus Satz 2.5 folgt, dass  $f$  einen invarianten Kreis hat. Die Behauptung folgt mit Lemma 2.8.

ii) und iii) folgen aus i) zusammen mit [35, Lemma 7] bzw. [35, Lemma 3].

iv) Die Annahme  $g' = 0$  impliziert  $l \geq 3$ . Wir nehmen nun an, dass  $l = 3$  ist. Dies liefert einen Widerspruch, denn aus Satz 2.11 folgt  $p > O(g)$  und im Widerspruch zur Grundannahme garantiert Korollar 2.13 einen Fixpunkt. Folglich ist  $l \geq 4$ .

v) Wieder bekommt man aus Korollar 2.13 die Abschätzung  $p \leq O(g)$ . Jetzt wendet man Satz 2.11 an.

vi) Die Riemann-Hurwitz Formel zusammen mit v) ergibt die Abschätzung

$$\frac{2g - 2}{p} = 2g' - 2 + \sum_{i=1}^3 \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \geq \sum_{i=1}^3 \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \geq \frac{3}{2}.$$

Nun braucht man nur noch diese Ungleichung nach  $p$  aufzulösen.  $\square$

**Bemerkungen.** Die Voraussetzungen in ii) können nur für  $g$  gerade,  $p \leq 2g + 2$  erfüllt werden (vergleiche Korollar 2.13), z.B. für die Abbildung  $g = 2$ ,  $p = 6$ ,  $g' = 0$ ,  $l = 4$ ,  $m_1 = m_2 = 2$ ,  $m_3 = m_4 = 3$ .

Die Abbildung mit  $g = 4$ ,  $p = 4$ ,  $g' = 1$ ,  $m_1 = m_2 = m_3 = 2$  nimmt die Schranke  $p = \frac{2}{3}(2g - 2)$  in vi) an.

**Korollar 2.15.** Wenn man auf fast allen  $F_g$  ein  $f$  der Ordnung  $p > O(g)$  ohne Fixpunkt findet, ist Meeks' Conjecture widerlegt.

*Beweis.* Direkt aus Satz 2.9.  $\square$

**Korollar 2.16.** Sei  $g > 2$  und  $f$  habe die Ordnung  $4g - 2$  oder  $4g + 1$ . Dann hat  $f$  keinen invarianten Kreis.

*Beweis.* In [35, Lemma 5 bzw. 6] wird bewiesen, dass unter diesen Voraussetzungen  $f$  keinen Fixpunkt hat. Aus Satz 2.9 folgt nun die Behauptung.  $\square$

**Lemma 2.17.** *i) Es gibt kein  $f$  der Ordnung  $p = 4g - 1$  mit Fixpunkt auf  $F_g$ , falls  $g = 2, 3$  oder  $\geq 5$  ist.*

*ii) Es gibt kein  $f$  der Ordnung  $p = 4g - 3$  mit Fixpunkt auf  $F_g$ , falls  $g = 4, 5$  oder  $\geq 7$  ist.*

**Beweis.** i) und ii) beweist man analog zu den Beweisen von [35, Lemma 6] bzw. [35, Lemma 5].  $\square$

**Korollar 2.18.** *Falls man auf fast allen  $F_g$  eine Abbildung der Ordnung  $4g - 3, 4g - 2, 4g - 1$  oder  $4g + 1$  finden kann, ist Meeks' Conjecture widerlegt.*

**Beweis.** Direkt aus Korollar 2.16 bzw. Lemma 2.17 zusammen mit Satz 2.9.  $\square$

**Korollar 2.19.** *Falls Meeks' Conjecture gilt, existiert eine Folge  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ , so dass jedes  $f : F_{g_i} \rightarrow F_{g_i}$  mit  $p > O(g_i)$  einen Fixpunkt hat.*

**Beweis.** Direkt aus Satz 2.9.  $\square$

**Satz 2.20.** ([25, (5)] oder [12, V.1.5 Corollary 1]) *Jedes  $f$  mit Primordnung  $p$  hat genau  $2 + (2g - 2g'p)/(p - 1)$  Fixpunkte.*

**Korollar 2.21.** *Für  $p$  prim existieren mindestens  $2 + (2g - 2g'p)/(p - 1)$  Isotopieklassen<sup>1</sup> von invarianten Kreisen.*

**Beweis.** Wende Satz 2.20 und Lemma 2.8 an.  $\square$

**Satz 2.22.** ([25, Theorem 1]) *Eine Primordnung  $p > g + 1$  ist nur für  $p = 2g + 1$  möglich.*

**Korollar 2.23.** *Falls  $2g + 1$  nicht prim ist, also für  $g = 4, 7, 10, 12, 13, \dots$ , hat jede Abbildung mit Primordnung einen invarianten essentiellen Kreis.*

**Beweis.** Satz 2.22 besagt, dass es keine Abbildung mit Primordnung  $p > g + 1$  gibt. Aus [35, Theorem 1] folgt nun die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** Für  $p = 2g + 1$  prim existiert eine Abbildung ohne invarianten essentiellen Kreis. (Wähle  $g' = 0, l = 3, m_1 = m_2 = m_3 = 2g + 1$  und wende [35, Lemma 4] an.)

Die Sätze und Korollare dieses Kapitels können an der Tabelle in Kapitel 2.3 getestet werden.

---

<sup>1</sup>Wir verlangen hier für die Isotopie  $H_t(x)$  zusätzlich, dass für jedes  $t \in [0, 1]$  das Bild von  $H_t$  ein invarianter Kreis ist.

## 2.7 Verhalten der Verzweigungspunkte unter Konjugation und Potenzieren von $f$

Sei  $f_1 : F_g \rightarrow F_g$  eine periodische Abbildung der Ordnung  $p$  und  $q : F_g \rightarrow F_g/\langle f_1 \rangle$  die natürliche Projektion mit den Verzweigungspunkten  $y_1, \dots, y_l$  und zugehörigen Indizes

$$m_1, \dots, m_l \quad (2 \leq m_i \leq p, m_i | p),$$

sowie

$$r_1, \dots, r_l \quad (r_i := \frac{p}{m_i}, 1 \leq r_i \leq \frac{p}{2}).$$

Die singulären Punkte auf  $F_g$  seien

$$\begin{aligned} q^{-1}(\{y_1, \dots, y_l\}) &= q^{-1}(y_1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} q^{-1}(y_l) \\ &= \{x_1, f_1(x_1), \dots, f_1^{r_1-1}(x_1)\} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \{x_l, f_1(x_l), \dots, f_1^{r_l-1}(x_l)\}, \end{aligned}$$

mit  $x_i = f_1^{r_i}(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, l$ , und  $f_2$  sei konjugiert zu  $f_1$ , d.h.  $f_2 = hf_1h^{-1}$  bzw.  $f_1 = h^{-1}f_2h$  für einen Diffeomorphismus  $h$  auf  $F_g$ :

$$\begin{array}{ccc} F_g & \xrightarrow{f_1} & F_g \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ F_g & \xrightarrow{f_2} & F_g \end{array}$$

Weiter sei  $z_i^{(j)} := h(f_1^j(x_i))$ , für jedes  $i = 1, \dots, l$  und  $j = 1, \dots, r_i$ .

**Lemma 2.24.** *Unter den genannten Voraussetzungen gilt dann:*

- i)  $f_2$  ist auch periodisch der Ordnung  $p$ .
- ii)  $z_i^{(j)}$  hat die Ordnung  $r_i$  unter  $f_2$ .
- iii)  $h$  ist eine Bijektion zwischen dem  $f_1$ -Orbit

$$\{x_i, f_1(x_i), \dots, f_1^{r_i-1}(x_i)\}$$

und dem  $f_2$ -Orbit

$$\{z_i^{(r_i)}, z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(r_i-1)}\}.$$

iv) Für einen (unter  $f_1$ ) regulären Punkt  $x \in F_g$  sei  $z := h(x)$ . Dann ist  $z$  regulär unter  $f_2$ .

**Beweis.** i) Es gilt

$$f_2^p = (hf_1h^{-1})^p = hf_1^p h^{-1} = \text{id}_{F_g}.$$

Aus der Annahme  $f_2^r = \text{id}_{F_g}$  (für ein  $1 \leq r < p$ ) folgt der Widerspruch

$$f_1^r = (h^{-1}f_2h)^r = h^{-1}f_2^r h = \text{id}_{F_g}.$$

ii) Hier ist

$$f_2^{r_i}(z_i^{(j)}) = hf_1^{r_i}h^{-1}(z_i^{(j)}) = hf_1^{r_i+j}(x_i) = hf_1^j(x_i) = z_i^{(j)}.$$

Annahme:  $f_2^k(z_i^{(j)}) = z_i^{(j)}$  für ein  $1 \leq k < r_i$ . Daraus folgt der Widerspruch

$$f_1^k(f_1^j(x_i)) = h^{-1}f_2^k(z_i^{(j)}) = h^{-1}(z_i^{(j)}) = f_1^j(x_i).$$

iii) Die Behauptung folgt direkt aus

$$f_2(z_i^{(j)}) = hf_1h^{-1}(z_i^{(j)}) = hf_1^{j+1}(x_i) = z_i^{(j+1)} \text{ (mit } z_i^{(r_i+1)} := z_i^{(1)}).$$

iv) Wir nehmen an, dass  $f_2^r(z) = z$  ist, für ein  $1 \leq r < p$ . Daraus folgt aber der Widerspruch

$$f_1^r(x) = h^{-1}f_2^r(z) = h^{-1}(z) = x.$$

□

Insbesondere ist  $h$  eine Bijektion zwischen den regulären Punkten unter  $f_1$  bzw.  $f_2$  und wir bekommen folgenden Satz:

**Satz 2.25.** *Sei  $f_2$  konjugiert zu  $f_1$ . Dann gilt  $l(f_2) = l(f_1)$  und*

$$\{m_1(f_2), \dots, m_l(f_2)\} = \{m_1(f_1), \dots, m_l(f_1)\}.$$

Jetzt wollen wir untersuchen, was beim Potenzieren passiert und betrachten deshalb  $f^r$  für ein  $1 < r < p$ . Dann gilt:

**Satz 2.26.** *i) Falls  $r$  und  $p$  einen echten gemeinsamen Teiler haben (also für  $\text{gcd}(r, p) > 1$ ), folgt*

$$(f^r)^{p/\text{gcd}(r,p)} = f^{(r/\text{gcd}(r,p)) \cdot p} = \text{id}_{F_g},$$

und die Ordnung von  $f^r$  ist  $p/\text{gcd}(r, p)$ , d.h. ein echter Teiler von  $p$ .

ii) Im Fall  $\text{gcd}(r, p) = 1$  hat  $f^r$  auch die Ordnung  $p$  und es ist  $l(f^r) = l(f)$  sowie

$$\{m_1(f^r), \dots, m_l(f^r)\} = \{m_1(f), \dots, m_l(f)\}.$$

Für die in Kapitel 2.5 betrachteten und als “verschieden” bezeichneten Abbildungen (jetzt  $f_1, f_2$  genannt) galt immer

$$\{m_1(f_2), \dots, m_l(f_2)\} \neq \{m_1(f_1), \dots, m_l(f_1)\}$$

und die Ordnung von  $f_2$  war nie ein echter Teiler der Ordnung von  $f_1$ . Folglich war  $f_2$  nicht konjugiert zu  $f_1$  und auch nicht konjugiert zu einer Potenz von  $f_1$ .

Als Nächstes überlegen wir uns, was beim Konjugieren bzw. Potenzieren mit invarianten Kreisen geschieht:

**Satz 2.27.** *i) Der Kreis  $C$  ist invariant unter  $f$  genau dann, wenn  $h(C)$  invariant unter  $hfh^{-1}$  ist.*

*ii) Sei  $r$  teilerfremd zu  $p$ . Der Kreis  $C$  ist invariant unter  $f$  genau dann, wenn  $C$  invariant unter  $f^r$  ist.*

**Beweis.** i) Beide Richtungen sind klar, denn einerseits ist

$$hfh^{-1}(h(C)) = hf(C) = h(C),$$

und andererseits

$$f(C) = h^{-1}hfh^{-1}(h(C)) = h^{-1}h(C) = C.$$

ii) Auch hier ist der Beweis sehr kurz. Die eine Implikation folgt aus

$$f^r(C) = f^{r-1}(f(C)) = f^{r-1}(C) = \dots = C,$$

für die andere Richtung benutzt man die Tatsache, dass für teilerfremde  $r$  und  $p$  ganze Zahlen  $i$  und  $j$  existieren, so dass  $1 = ir + jp$  gilt. Daraus folgt nun

$$f(C) = f^{ir+jp}(C) = f^{ir}(C) = C.$$

□

Die Klassifikation periodischer Abbildungen (bis auf Konjugation) wird in [27], [39] und [8] untersucht.

# Kapitel 3

## Fall III

In diesem Kapitel untersuchen wir Fall III, d.h. im Folgenden sei immer  $N_g$  eine nicht-orientierbare geschlossene Fläche vom Geschlecht  $g \geq 3$ . (Einzige Ausnahme bildet dabei Kapitel 3.2, wo speziell  $g = 1$  und  $g = 2$  analysiert werden.) Weiter sei immer  $f : N_g \rightarrow N_g$  eine periodische Abbildung von ungerader Ordnung  $p \geq 3$ . Wie im Kapitel 1.3.5 beschrieben, gilt dann:

- $N_g/\langle f \rangle$  ist nicht-orientierbar
- $k' = 0$
- $m_i \mid p$
- R-H:  $\frac{g-2}{p} = g' - 2 + \sum_{i=1}^l (1 - \frac{1}{m_i})$
- $g' = 1 \Rightarrow p = \text{lcm}(m_1, \dots, m_l)$

Wie im Fall I gehören zur verzweigten Überlagerung  $q : N_g \rightarrow N_g/\langle f \rangle$  Darstellungen

$$\pi_1(N_g/\langle f \rangle - \{y_1, \dots, y_l\}) \twoheadrightarrow Z_p,$$

sowie

$$\pi_1^O(N_g/\langle f \rangle) \twoheadrightarrow Z_p,$$

die wir beide mit  $\theta$  bezeichnen. Umgekehrt kann aus  $\theta$  wieder  $q$  zurückgewonnen werden.

Ein Ziel dieses Kapitels ist, Resultate über die Existenz von invarianten Kreisen im Fall III zu gewinnen. Dies wird dadurch erleichtert, dass Lemma 1, 2 und 3 aus [35] fast wörtlich übertragen werden können, siehe Kapitel 3.3. (Im Kapitel 4 werden wir feststellen, dass dies für den Fall II und IV nicht mehr gilt.) In den Kapiteln 3.7 bis 3.10 interessieren wir uns für die maximale (ungerade) Ordnung zu gegebenem  $g$ .

### 3.1 Liste der möglichen Abbildungen für

$$3 \leq g \leq 20$$

In der folgenden Tabelle sind alle möglichen Kombinationen für  $3 \leq g \leq 20$ ,  $p$ ,  $g'$ ,  $l$  und  $m_1, \dots, m_l$  aufgelistet, welche zu einer Abbildungen im Fall III führen. Wie schon erwähnt, werden die Fälle  $g = 1$  und  $g = 2$  im Kapitel 3.2 behandelt.

$g$	$p$	$g'$	$l$	$m_i$
3	3	1	2	3, 3
4	3	2	1	3
5	3	1	3	3, 3, 3
5	3	3	0	
5	5	1	2	5, 5
6	3	2	2	3, 3
6	5	2	1	5
7	3	1	4	3, 3, 3, 3
7	3	3	1	3
7	5	3	0	
7	7	1	2	7, 7
7	9	1	2	3, 9
8	3	2	3	3, 3, 3
8	3	4	0	
8	7	2	1	7
8	9	2	1	3
9	3	1	5	3, 3, 3, 3, 3
9	3	3	2	3, 3
9	5	1	3	5, 5, 5
9	7	3	0	
9	9	1	2	9, 9
9	15	1	2	3, 5
10	3	2	4	3, 3, 3, 3
10	3	4	1	3
10	5	2	2	5, 5
10	9	2	1	9
11	3	1	6	3, 3, 3, 3, 3, 3

11	3	3	3	3, 3, 3
11	3	5	0	
11	5	3	1	5
11	9	3	0	
11	11	1	2	11, 11
11	15	1	2	3, 15
12	3	2	5	3, 3, 3, 3, 3
12	3	4	2	3, 3
12	5	4	0	
12	11	2	1	11
12	15	2	1	3
13	3	1	7	3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
13	3	3	4	3, 3, 3, 3
13	3	5	1	3
13	5	1	4	5, 5, 5, 5
13	7	1	3	7, 7, 7
13	9	1	3	3, 3, 9
13	11	3	0	
13	13	1	2	13, 13
13	15	1	2	5, 15
13	21	1	2	3, 7
14	3	2	6	3, 3, 3, 3, 3, 3
14	3	4	3	3, 3, 3
14	3	6	0	
14	5	2	3	5, 5, 5
14	7	2	2	7, 7
14	9	2	2	3, 3
14	13	2	1	13
14	15	2	1	5
15	3	1	8	3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
15	3	3	5	3, 3, 3, 3, 3
15	3	5	2	3, 3
15	5	3	2	5, 5
15	7	3	1	7



15	9	1	3	3, 9, 9
15	13	3	0	
15	15	1	2	15, 15
15	21	1	2	3, 21
16	3	2	7	3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
16	3	4	4	3, 3, 3, 3
16	3	6	1	3
16	5	4	1	5
16	7	4	0	
16	9	2	2	3, 9
16	15	2	1	15
16	21	2	1	3
17	3	1	9	3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
17	3	3	6	3, 3, 3, 3, 3, 3
17	3	5	3	3, 3, 3
17	3	7	0	
17	5	1	5	5, 5, 5, 5, 5
17	5	5	0	
17	9	1	3	9, 9, 9
17	9	3	1	3
17	15	3	0	
17	17	1	2	17, 17
18	3	2	8	3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
18	3	4	5	3, 3, 3, 3, 3
18	3	6	2	3, 3
18	5	2	4	5, 5, 5, 5
18	9	2	2	9, 9
18	17	2	1	17
19	3	1	10	3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
19	3	3	7	3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
19	3	5	4	3, 3, 3, 3
19	3	7	1	3
19	5	3	3	5, 5, 5
19	7	1	4	7, 7, 7, 7

19	9	1	4	3, 3, 3, 9
19	9	3	1	9
19	15	1	3	3, 3, 5
19	17	3	0	
19	19	1	2	19, 19
19	21	1	2	7, 21
19	27	1	2	3, 27
20	3	2	9	3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
20	3	4	6	3, 3, 3, 3, 3, 3
20	3	6	3	3, 3, 3
20	3	8	0	
20	5	4	2	5, 5
20	7	2	3	7, 7, 7
20	9	2	3	3, 3, 3
20	9	4	0	
20	19	2	1	19
20	21	2	1	7
20	27	2	1	3

Es fällt auf, dass für jedes  $g$  eine Abbildung der Ordnung  $p = 3$  existiert und zwar zum Beispiel (mit  $k \in \mathbf{N}$ ):

$g$	$p$	$g'$	$l$
$2k + 1$	3	1	$k + 1$
$2k + 2$	3	2	$k$ .

Wir beschreiben kurz eine geometrisch sehr anschauliche Methode, die zeigt, wie aus einer Abbildung im Fall I eine Abbildung im Fall III entstehen kann. Man nehme eine orientierungserhaltende periodische Abbildung auf  $F_g$  (Fall I) von ungerader Ordnung  $p$  mit  $l \geq 1$  Verzweigungspunkten und Quotient  $F_{g'}$ . Wähle einen dieser Verzweigungspunkte, z.B.  $y_i$  mit Index  $m_i$ . Diesem entsprechen  $r_i = p/m_i$  singuläre Punkte  $x_1, \dots, x_{r_i}$ . Man bildet jetzt

$$F_g \# \underbrace{\mathbf{RP}^2 \# \dots \# \mathbf{RP}^2}_{r_i} \cong N_{2g+r_i},$$

indem man kleine Scheiben um die singulären Punkte ausschneidet und dort reell projektive Ebenen hineinklebt<sup>1</sup>. Die ursprüngliche Abbildung auf

<sup>1</sup>In der Differentialtopologie nennt man diesen Prozess *Aufblasen eines Punktes*.

$F_g$  induziert eine periodische Abbildung auf  $N_{2g+r_i}$  der Ordnung  $p$  mit  $l - 1$  Verzweigungspunkten und Verzweigungsindizes  $m_1, \dots, \widehat{m_i}, \dots, m_l$ , sowie Quotient  $N_{2g'+1}$ . (Man mache sich dies geometrisch klar, insbesondere was mit den hineingeklebten projektiven Ebenen unter der Quotientenbildung geschieht; hier ist entscheidend, dass  $m_i$  ungerade ist.)

Leider kann man so nicht automatisch aus Abbildungen ohne invarianten Kreis im Fall I solche im Fall III konstruieren.

Zur beschriebenen Konstruktion geben wir zwei Beispiele, ein anschauliches (Abb. 1.4 in Kapitel 1.3.1) und ein eher abstraktes:

	$g$	$p$	$g'$	$l$	$m_1, \dots, m_l$	(Fall I)
	3	3	1	2	3, 3	
bzw.	4	15	0	3	3, 5, 15	

induziert

	$g$	$p$	$g'$	$l$	$m_1, \dots, m_l$	(Fall III)
	7	3	3	1	3	
bzw.	11	15	1	2	3, 15.	

### 3.2 Invariante Kreise auf $\mathbb{RP}^2$ und $K$

Wir suchen eine notwendige Bedingung für die Existenz einer periodischen Abbildung  $f : N_g \rightarrow N_g$  ( $g = 1, 2$ ) der ungeraden Ordnung  $p \geq 3$ . Die Abbildung  $f$  induziert eine zyklische verzweigte Überlagerung  $q : N_g \rightarrow N_g / \langle f \rangle = N_{g'}$  vom Grad  $p$ . Nimmt man die Verzweigungspunkte  $\{y_1, \dots, y_l\} \subset N_{g'}$  und die singulären Punkte  $q^{-1}(\{y_1, \dots, y_l\}) \subset N_g$  weg, erhält man eine unverzweigte  $p$ -blättrige Überlagerung

$$N_g - q^{-1}(\{y_1, \dots, y_l\}) \rightarrow N_{g'} - \{y_1, \dots, y_l\}.$$

Es gilt daher (siehe z.B. [3, Proposition IV.13.5])

$$\chi(N_g - q^{-1}(\{y_1, \dots, y_l\})) = p \cdot \chi(N_{g'} - \{y_1, \dots, y_l\}). \quad (*)$$

Dabei bezeichnet  $\chi$  die Euler-Charakteristik. Das ist die gewünschte notwendige Bedingung.

**Bemerkung.** Die Gleichung (\*) ist nichts anderes als die Riemann-Hurwitz Formel im Fall III.

### 3.2.1 $\mathbf{RP}^2$

Hier ist  $g = 1$ ,  $\chi(\mathbf{RP}^2) = 1$ ; die Gleichung (\*) lautet deshalb

$$1 - \sum_{i=1}^l \frac{p}{m_i} = p(2 - g' - l).$$

Daraus folgt

$$2 - g' - \frac{1}{p} = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

Für  $g' \geq 2$  wird die linke Seite der letzten Gleichung negativ, während die rechte Seite natürlich nicht negativ sein kann. Folglich muss  $g' = 1$  sein und wir erhalten die Gleichung

$$1 - \frac{1}{p} = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

Den Fall  $l = 0$  kann man ausschliessen, weil sonst  $p = 1$  wäre. Andererseits ist  $l \leq 1$  wegen  $1 - 1/p < 1$ . Insgesamt muss deshalb  $l = 1$  sein, was bedeutet, dass  $m_1 = p$  ist. Wir haben also die Kandidaten  $p = 2k + 1$  ( $k \in \mathbf{N}$ ),  $l = 1$ ,  $m_1 = p$ ,  $g' = 1$  gefunden.

### 3.2.2 Kleinsche Flasche $K$

Hier ist  $g = 2$ ,  $\chi(K) = 0$ , und (\*) lautet demzufolge

$$- \sum_{i=1}^l \frac{p}{m_i} = p(2 - g' - l)$$

oder umgeschrieben

$$2 - g' = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

Der Fall  $g' \geq 3$  ist ausgeschlossen, weil sonst die linke Seite negativ wird. Aus  $g' = 2$  folgt  $l = 0$ , was theoretisch möglich ist. Hingegen liefert der Fall  $g' = 1$  einen Widerspruch, denn

$$1 = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$$

impliziert  $l = 2$ ,  $m_1 = m_2 = 2$  und deshalb  $p = \text{lcm}(m_1, m_2) = 2$ . Das ist unmöglich, weil  $p$  nach Voraussetzung ungerade ist. Es verbleiben die Kandidaten  $p = 2k + 1$  ( $k \in \mathbf{N}$ ),  $l = 0$ ,  $g' = 2$ .

### 3.2.3 Existenz von invarianten Kreisen

Alle gefundenen Kandidaten existieren tatsächlich, denn sie sind geometrisch (als Rotationen) leicht zu realisieren. Man sieht sofort, dass im Fall  $\mathbf{RP}^2$  essentielle (nicht-trennende) und nicht-essentielle invariante Kreise existieren. Im Fall  $K$  existieren essentielle (trennende und nicht-trennende) sowie nicht-essentielle Kreise.

## 3.3 Verallgemeinerung von Lemma 1, 2 und 3 aus [35]

Wir wollen zeigen, dass sich Lemma 1, 2 und 3 aus [35], die bei der Untersuchung von invarianten Kreisen im Fall I eine sehr wichtige Rolle spielen, praktisch wörtlich auf den Fall III übertragen lassen. In Kapitel 3.4, 3.5 sowie 3.6 werden die so erhaltenen Lemma 3.1, 3.2 und 3.3 denn auch oft benutzt. Ab jetzt sei wieder  $g \geq 3$  und  $f : N_g \rightarrow N_g$  eine periodische Abbildung von ungerader Ordnung  $p$ .

**Lemma 3.1.** *Sei  $C$  ein invarianter Kreis von  $f$  und  $r \leq p$  die Ordnung der Einschränkung von  $f$  auf  $C$ . Dann gilt*

- i)  $r = p$ .
- ii)  $C$  enthält keinen singulären Punkt.

*Beweis.* i) Wähle einen Punkt  $y \in C$  und ein Geodätenstück  $A$  durch  $y$  senkrecht zu  $C$ .

$f^r$  ist eine Isometrie, die  $C$  punktweise festlässt. Für einen Punkt  $a \in A$  gibt es deshalb nur zwei Möglichkeiten:  $f^r(a) = a$  oder  $f^r(a) \neq a$ ,  $f^{2r}(a) = a$  ("Spiegelung"). In jedem Fall ist  $f^{2r}(a) = a$  für alle  $a \in A$ . Folglich ist  $f^{2r} = \text{id}_{N_g}$ , denn eine Isometrie ist durch ihren Wert in einem Punkt und ihr Differential in diesem Punkt eindeutig festgelegt (siehe z.B. [9, Lemma 8.4.2]) und deshalb ist  $2r = jp$  für ein  $j \in \mathbf{N}$ . Weiter ist  $jp = 2r \leq 2p$ , denn  $r \leq p$ . Also kann  $j$  nur die Werte 1 oder 2 annehmen. Weil  $p$  ungerade ist, kommt nur  $j = 2$  in Frage und daraus folgt  $r = p$ . (Insbesondere ist die zweite Möglichkeit ausgeschlossen.)

ii) Annahme: Es existiert ein singulärer Punkt  $x \in C$ , d.h.  $f^w(x) = x$  für ein  $1 \leq w < p$ . Um diese Annahme zu widerlegen, beweisen wir die folgenden vier Behauptungen:

Behauptung 1:  $f_C^w := f^w|_C \neq \text{id}_C$ . Das ist mit i) klar, weil  $w < p$  ist.

Behauptung 2:  $f_C^w$  ist orientierungsumkehrend auf  $C$ . Zum Beweis nehmen wir an, dass  $f_C^w$  orientierungserhaltend auf  $C$  ist. Sei  $C$  parametrisiert durch  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ . Die Abbildung  $f_C^w : C \rightarrow f^w(C) = C$  induziert einen Homöomorphismus  $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $\alpha(0) = 0$ . Aus der

Annahme folgt, dass  $\alpha$  streng monoton wachsend ist. Es existiert ein  $\xi \in (0, 1)$  mit  $\alpha(\xi) \neq \xi$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir  $\alpha(\xi) < \xi$  an. Daraus folgt der Widerspruch

$$\xi = \alpha^p(\xi) < \alpha^{p-1}(\xi) < \dots < \alpha^2(\xi) < \alpha(\xi) < \xi.$$

Behauptung 3:  $f_C$  ist orientierungsumkehrend auf  $C$ . Auch das ist klar, denn andernfalls wäre mit  $f_C$  auch  $f_C^w$  orientierungserhaltend auf  $C$ , was der vorhergehenden Behauptung 2 widerspricht.

Behauptung 4:  $f_C$  hat die Ordnung 2 auf  $C$ . Beweis: Mit Behauptung 3 folgt aus dem Lefschetz-Fixpunktsatz, dass  $f_C$  einen Fixpunkt  $y \in C$  hat. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $C$  parametrisiert durch  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = y$ . Die Abbildung  $f_C$  induziert einen Homöomorphismus  $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $\beta(0) = 1, \beta(1) = 0$ . Wir nehmen nun an, dass  $f_C$  nicht die Ordnung 2 auf  $C$  hat. Deshalb ist  $\beta^2(\xi) < \xi$  (oder  $\beta^2(\xi) > \xi$ ) für ein  $\xi \in (0, 1)$ . Weil  $f_C^2$  orientierungserhaltend ist, ist  $\beta^2$  streng monoton steigend und es folgt der Widerspruch

$$\xi = \beta^{2p}(\xi) < \beta^{2p-2}(\xi) < \dots < \beta^2(\xi) < \xi$$

(oder  $\xi = \beta^{2p}(\xi) > \beta^{2p-2}(\xi) > \dots > \beta^2(\xi) > \xi$ ).

Aus Teil i) folgt somit  $p = 2$ , welches die Hauptannahme widerlegt, da  $p$  nach Voraussetzung ungerade ist. Teil ii) folgt übrigens auch direkt aus Sätzen über das Verhalten von periodischen Abbildungen auf  $S^1$  (siehe z.B. [37, Chapter XII, Theorem 7.3]).  $\square$

**Lemma 3.2.** *Sei  $B$  die Menge der Verzweigungspunkte der verzweigten Überlagerung  $q : N_g \rightarrow N_g/\langle f \rangle$ . Sei  $\theta : \pi_1(N_g/\langle f \rangle - B) \rightarrow Z_p$  die durch  $q$  induzierte Darstellung und  $C$  ein invarianter Kreis von  $f$ . Dann ist  $q(C)$  ein Kreis in  $N_g/\langle f \rangle - B$  und  $\theta([q(C)])$  ein Erzeuger von  $Z_p$ . Umgekehrt, falls  $\bar{C}$  ein Kreis in  $N_g/\langle f \rangle - B$  ist und  $\theta([\bar{C}])$  die Gruppe  $Z_p$  erzeugt, dann ist  $q^{-1}(\bar{C})$  ein invarianter Kreis von  $f$ .*

**Beweis.** Sei  $C$  ein invarianter Kreis von  $f$ . Aus Lemma 3.1 ii) folgt, dass  $C$  keinen singulären Punkt enthält. Folglich operiert  $\langle f \rangle$  frei (als “Rotation um  $2\pi/p$ ”) auf  $C$  (siehe wieder [37, Chapter XII, Theorem 7.3]) und  $\bar{C} := q(C)$  ist ein Kreis in  $N_g/\langle f \rangle - B$ . Der Kreis  $C$  ist eine  $p$ -blättrige unverzweigte Überlagerung von  $\bar{C}$ . Deshalb erzeugt  $\theta([\bar{C}])$  die Gruppe  $Z_p$ .

Umgekehrt sei  $\bar{C}$  ein Kreis in  $N_g/\langle f \rangle - B$ . Dann ist  $q^{-1}(\bar{C})$  eine Vereinigung von Kreisen in  $N_g$ , die invariant unter  $f$  ist. Wenn  $\theta([\bar{C}])$  die Gruppe  $Z_p$  erzeugt, besteht  $q^{-1}(\bar{C})$  aus genau einem (invarianten) Kreis (vergleiche [27, §2 in der englischen Übersetzung]).  $\square$

**Lemma 3.3.** *Sei  $C$  ein invarianter Kreis von  $f$ . Dann trennt  $C$  die Fläche  $N_g$  genau dann, wenn  $\bar{C} := q(C)$  den Quotienten  $N_g/\langle f \rangle$  trennt.*

**Beweis.** Um die erste Implikation zu beweisen, nehmen wir an, dass  $C$  die Fläche  $N_g$  trennt. Infolgedessen lässt sich  $N_g$  schreiben als  $N_g = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} C$  mit wegzusammenhängenden  $A_1$  und  $A_2$ .

Möglich ist nur  $f(A_1) = A_1, f(A_2) = A_2$  bzw.  $f(A_1) = A_2, f(A_2) = A_1$ . (Denn sonst existieren zwei Punkte  $a, b \in A_1$  mit  $f(a) \in A_1, f(b) \in A_2$ . Dann kann man einen Weg  $\gamma$  wählen, der  $a$  mit  $b$  in  $A_1$  verbindet.  $f(\gamma)$  verbindet  $f(a)$  mit  $f(b)$ , führt also durch  $C$ . Widerspruch.)

Weil  $p$  ungerade und  $f^p = \text{id}_{N_g}$  ist, folgt  $f(A_1) = A_1, f(A_2) = A_2$ . Aus Lemma 3.2 folgt, dass  $\bar{C}$  ein Kreis in  $N_g/\langle f \rangle - B$  ist. Annahme:  $\bar{C}$  trennt  $N_g/\langle f \rangle$  nicht. Wähle  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$  zwei nicht-singuläre Punkte von  $f$ . Es gibt einen Weg  $\gamma$  in  $N_g/\langle f \rangle - (B \cup \bar{C})$  von  $q(a_1)$  nach  $q(a_2)$ . Hebe  $\gamma$  nach  $N_g - q^{-1}(B)$  zu  $\tilde{\gamma}$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = a_1$  an. Der Lift  $\tilde{\gamma}$  verbindet  $a_1$  mit  $\tilde{\gamma}(1) \in q^{-1}(q(a_2)) \subset A_2$  (hier braucht man  $f(A_2) = A_2$ ) ohne durch  $C$  zu gehen; ein Widerspruch.

Umgekehrt trenne  $\bar{C}$  den Quotienten  $N_g/\langle f \rangle$ , d.h.  $N_g/\langle f \rangle = \bar{A}_1 \dot{\cup} \bar{A}_2 \dot{\cup} \bar{C}$ . Annahme:  $C = q^{-1}(\bar{C})$  trennt  $N_g$  nicht. Wähle zwei Punkte  $\bar{a}_1 \in \bar{A}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}_2$ . Sei  $a_1 \in q^{-1}(\bar{a}_1), a_2 \in q^{-1}(\bar{a}_2)$  und  $\gamma$  ein Weg von  $a_1$  nach  $a_2$ , der nicht durch  $C$  führt. Folglich verbindet  $q(\gamma)$  den Punkt  $\bar{a}_1$  mit  $\bar{a}_2$  und geht nicht durch  $\bar{C}$ , was der Voraussetzung widerspricht.  $\square$

### 3.4 Existenz von invarianten essentiellen Kreisen für $p$ prim

In diesem Kapitel ist speziell  $p$  eine Primzahl (oder Primpotenz). Der nächste Satz gibt eine obere Schranke für eine Automorphismengruppe von Primzahlordnung auf gegebenem  $N_g$  an (vergleiche Satz 1.17 ii)). In Satz 3.5 wird gezeigt, dass für  $p$  eine Primpotenz jedes  $f$  (immer im Fall III) einen invarianten essentiellen Kreis besitzt.

**Satz 3.4.** *Sei  $g \geq 3$  und  $p$  prim. Dann ist  $p \leq g$  und  $p = g$  gilt genau für  $g' = 1, l = 2, m_1 = m_2 = p$ .*

**Beweis.** Wenn  $p$  prim ist, muss  $m_i = p$  sein, d.h. jeder singuläre Punkt ist ein Fixpunkt. Die Riemann-Hurwitz Formel vereinfacht sich zu

$$\frac{g-2}{p} = g' - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Wir machen eine Fallunterscheidung nach  $g'$ :

- $g' \geq 3$

$$\Rightarrow \frac{g-2}{p} \geq 1$$

$$\Rightarrow p \leq g - 2.$$

- $g' = 2$

$$\Rightarrow \frac{g-2}{p} = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{l(p-1)}{p}$$

$$\Rightarrow g - 2 = l(p - 1)$$

$$g \geq 3 \Rightarrow l \geq 1$$

$$\Rightarrow p = \frac{g-2}{l} + 1 \leq g - 1.$$

- $g' = 1$

$$\Rightarrow \frac{g-2}{p} = -1 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{-p + lp - l}{p}$$

$$\Rightarrow g - 2 = -l + p(l - 1)$$

$$g \geq 3 \Rightarrow l \geq 2$$

$$\Rightarrow p = \frac{g-2+l}{l-1} \leq g.$$

$$p = g \Leftrightarrow l = 2.$$

□

**Satz 3.5.** Für  $p$  eine Primpotenz hat jedes  $f$  einen invarianten essentiellen Kreis.

**Beweis.**  $q : N_g \rightarrow N_g / \langle f \rangle$  wird dargestellt durch  $\theta : \pi_1^O(N_g / \langle f \rangle) \rightarrow Z_p$ , wobei die Orbifold-Fundamentalgruppe  $\pi_1^O(N_g / \langle f \rangle)$  durch

$$\langle d_1, \dots, d_{g'}, x_1, \dots, x_l \mid x_1^{m_1} = \dots = x_l^{m_l} = x_1 \cdot \dots \cdot x_l \cdot d_1^2 \cdot \dots \cdot d_{g'}^2 = 1 \rangle.$$

beschrieben werden kann.

Wir unterscheiden die beiden Fälle  $l = 0$  bzw.  $l \geq 1$ .

Zuerst betrachten wir den Fall  $l = 0$ . Hier hat  $f$  keine singulären Punkte und folglich auch keine Verzweigungspunkte. Weil  $p$  eine Primpotenz ist, sind alle zu  $p$  teilerfremden Elemente in  $Z_p$  Erzeuger. Aus der Surjektivität von  $\theta$  folgt deshalb, dass mindestens ein  $d_i$  existiert, so dass  $\theta(d_i)$  ein Erzeuger von



$Z_p$  ist. Die Repräsentanten von  $d_i$  sind alle nicht-trennende Kreise. Sei  $\bar{C}$  ein solcher Repräsentant, d.h. wir setzen  $[\bar{C}] := d_i$ .

Sei  $l \geq 1$ : Falls  $\theta(d_j)$  für ein  $1 \leq j \leq g'$  ein Erzeuger von  $Z_p$  ist, setzen wir genau wie vorher  $[\bar{C}] := d_j$ .

Andernfalls, d.h. falls kein  $\theta(d_j)$  ein Erzeuger von  $Z_p$  ist, existiert mindestens ein Verzweigungspunkt  $y_k$ , so dass  $\theta(x_k)$  die Gruppe  $Z_p$  erzeugt (wieder weil  $p$  eine Primpotenz und  $\theta$  surjektiv ist). Nimm dann ein beliebiges  $d_i$  (mit  $\theta(d_i) = \bar{0}$ ) und bilde  $[\bar{C}] := d_i \cdot x_k$  (betrachte dazu Abb. 3.1). Dann wird  $Z_p$

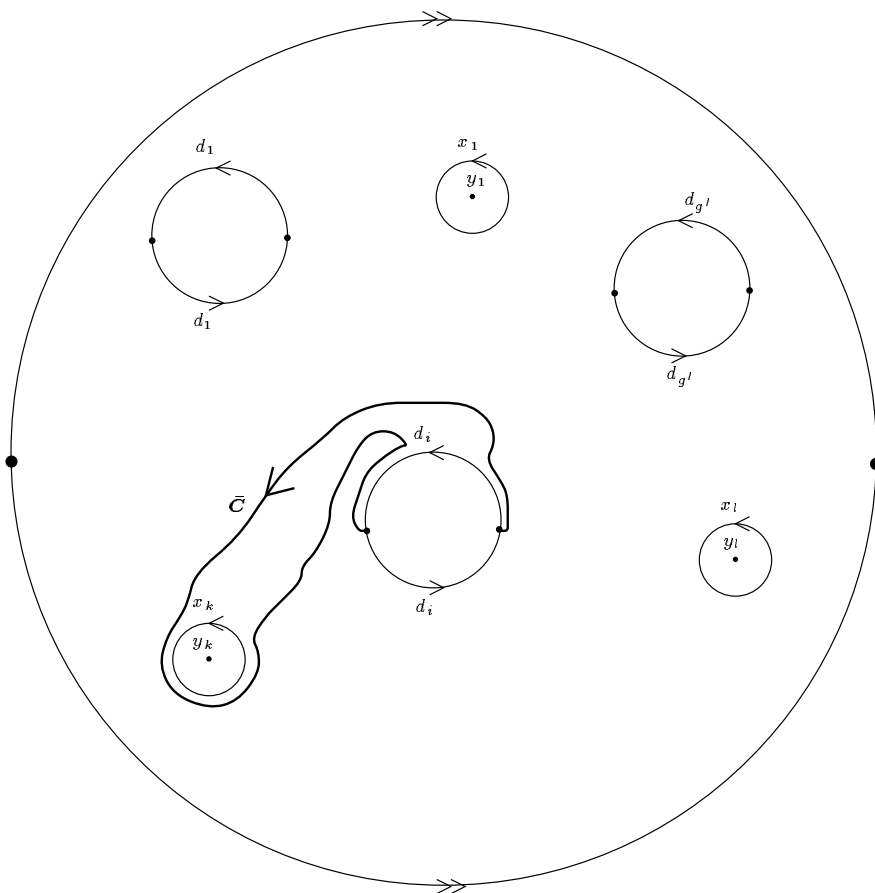


Abb. 3.1:  $d_i \cdot x_k$

erzeugt von  $\theta([\bar{C}]) = \theta(d_i) + \theta(x_k) = \theta(x_k)$ . Der Kreis  $\bar{C}$  ist nicht-trennend, weil  $d_i$  nicht-trennend ist ( $d_i \cdot x_k$  und  $d_i$  sind homotop in  $\pi_1(|N_g/\langle f \rangle|)$ ).

In jedem Fall ist  $\bar{C}$  ein nicht-trennender Kreis in  $N_g/\langle f \rangle - B$  und  $\theta([\bar{C}])$  ein Erzeuger von  $Z_p$ . Aus Lemma 3.2 folgt deshalb, dass  $C := q^{-1}(\bar{C})$  ein invarianter Kreis von  $f$  auf  $N_g - q^{-1}(B)$  ist. Mit Lemma 3.3 folgt, dass  $C$  nicht-trennend, insbesondere also essentiell ist.  $\square$

### 3.5 Existenz eines invarianten essentiellen Kreises zu jedem (ungeraden) $p$

**Satz 3.6.** *Zu jedem ungeraden  $p \geq 3$  existiert eine nicht-orientierbare Fläche  $N_g$  ( $g \geq 3$ ) und ein  $f : N_g \rightarrow N_g$  der Ordnung  $p$  mit einem invarianten essentiellen Kreis.*

**Beweis.** Wir unterscheiden drei Fälle:

i) Sei  $p$  prim:

Setze  $g = p$ ,  $g' = 1$ ,  $l = 2$ ,  $m_1 = m_2 = p$ . Die Existenz eines invarianten essentiellen Kreises für  $p$  prim wurde im Kapitel 3.4 gezeigt.

ii) Sei  $p = q_1 \cdot q_2^{r_2} \cdot \dots \cdot q_\alpha^{r_\alpha}$  mit  $\alpha \geq 2$  sowie  $3 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_\alpha$ , für  $q_i$  prim ( $1 \leq i \leq \alpha$ ) und  $r_j \geq 1$  ( $2 \leq j \leq \alpha$ ):

Setze dann

$$g = 2 - q_1 + p - \frac{p}{q_1}, \quad g' = 1, \quad l = 2, \quad m_1 = q_1, \quad m_2 = \frac{p}{q_1}.$$

Kontrolliere, dass  $p$  durch  $m_i$  teilbar ist, die Riemann-Hurwitz Formel erfüllt ist, sowie  $p = \text{lcm}(m_1, m_2)$  gilt. Definiere jetzt

$$\theta : \langle d_1, x_1, x_2 \mid x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = x_1 \cdot x_2 \cdot d_1^2 = 1 \rangle =: \Lambda \rightarrow Z_p \text{ durch}$$

$$\begin{aligned} \theta(x_1) &= \frac{p}{q_1} = q_2^{r_2} \cdot \dots \cdot q_\alpha^{r_\alpha}, \\ \theta(x_2) &= q_1, \\ \theta(d_1) &= \frac{-(q_1 + q_2^{r_2} \cdot \dots \cdot q_\alpha^{r_\alpha})}{2}. \end{aligned}$$

Kontrolliere, dass  $\theta$  ein Homomorphismus ist und dass  $\theta(x_i)$  die Ordnung  $m_i$  hat. Es sei  $\Lambda^+$  die Untergruppe der orientierungserhaltenden Elemente von  $\Lambda$ . Dann gilt  $Z_p = \theta(\Lambda^+)$ , denn wegen

$$\text{gcd}\left(\frac{p}{q_1}, q_1\right) = 1$$

existieren ganze Zahlen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  mit

$$\alpha_1 \frac{p}{q_1} + \alpha_2 q_1 = 1$$

und folglich ist

$$\theta(x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}) = \bar{1}.$$

Mit [4, Proposition 3.2] folgt, dass  $\theta$  ein Flächen-Kern-Homomorphismus ist.

Jeder Repräsentant von  $d_1$  ist ein nicht-trennender Kreis in  $\mathbf{RP}^2$ . Weiter bemerken wir, dass  $\theta(d_1)$  durch kein  $q_i$  teilbar ist und daher  $Z_p$  erzeugt. Aus Lemma 3.2 und 3.3 folgt die Behauptung für ii) wie im Beweis von Satz 3.5.

iii) Sei  $p = q_1^{r_1} \cdot q_2^{r_2} \cdot \dots \cdot q_\alpha^{r_\alpha}$  mit  $\alpha \geq 1$ ,  $r_1 \geq 2$  sowie  $3 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_\alpha$ , für  $q_i$  prim ( $1 \leq i \leq \alpha$ ) und  $r_j \geq 1$  ( $2 \leq j \leq \alpha$ ):

Die Strategie ist genau wie in ii). Setze

$$g = 1 + p - \frac{p}{q_1}, g' = 1, l = 2, m_1 = q_1, m_2 = p$$

und

$$\begin{aligned} \theta(x_1) &= \frac{p}{q_1} = q_1^{r_1-1} \cdot q_2^{r_2} \cdot \dots \cdot q_\alpha^{r_\alpha}, \\ \theta(x_2) &= 1, \\ \theta(d_1) &= \frac{-(1 + q_1^{r_1-1} \cdot q_2^{r_2} \cdot \dots \cdot q_\alpha^{r_\alpha})}{2}. \end{aligned}$$

$\theta(d_1)$  erzeugt  $Z_p$ , da  $\theta(d_1)$  durch kein  $q_i$  teilbar ist. Die Behauptung folgt genau wie in ii).  $\square$

**Bemerkung.** In diesem Beweis ist das gewählte  $g$  jeweils minimal zum vorgegebenen  $p$  (siehe [4, Theorem 4.1 und 4.3]).

### 3.6 Abbildungen ohne invarianten Kreis

**Satz 3.7.** *Es gibt eine periodische Abbildung der Ordnung 1785 auf  $N_{1767}$  ohne invarianten Kreis.*

**Beweis.** Die Idee ist dieselbe wie im Beweis von Satz 2.1. Anstelle von [35, Lemma 2] tritt hier das Analogon Lemma 3.2 und anstatt [23, Theorem 1] verwenden wir eine Aussage aus [7].

Im Fall I war eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Abbildung ohne invarianten Kreis  $g' = 0$ . Hier sind a priori verschiedene  $g' \geq 1$  denkbar. Wir entscheiden uns für  $g' = 1$ ,  $l = 2$ . Es gilt

$$\pi_1(N_1 - \{y_1, y_2\}) = \langle d_1, x_1, x_2 \mid x_1 \cdot x_2 \cdot d_1^2 = 1 \rangle.$$

Sei  $p = 1785 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$ ,  $g = 1767$ ,  $m_1 = 595$ ,  $m_2 = 105$ . Damit sind die Bedingungen aus Kapitel 1.3.5 erfüllt, nämlich  $m_i | p$ , die Riemann-Hurwitz Formel sowie  $\text{lcm}(m_1, m_2) = p$ . Definiere

$$\theta : \langle d_1, x_1, x_2 \mid x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = x_1 \cdot x_2 \cdot d_1^2 = 1 \rangle =: \Lambda \rightarrow Z_{1785}$$

durch

$$\begin{aligned} \theta(d_1) &: = \overline{1775} = \overline{5} \cdot \overline{355}, \\ \theta(x_1) &: = \overline{3}, \\ \theta(x_2) &: = \overline{17}. \end{aligned}$$

Überprüfe, dass dies einen Gruppenhomomorphismus definiert und dass  $\theta(x_i)$  die Ordnung  $m_i$  hat. Aus  $\theta(d_1^2 \cdot x_1^7) = \bar{1}$  folgt  $\theta(\Lambda^+) = Z_p$ , insbesondere ist  $\theta$  surjektiv. [7, Case (iv), p.145] sagt aus, dass nur Inverse oder Konjugierte von 1,  $d_1, d_1^2, d_1 x_1, (d_1 x_1)^2, x_1, d_1^2 x_1$  durch Kreise in  $N_1 - \{y_1, y_2\}$  repräsentiert werden können (vergleiche Abb. 3.2). Weil  $Z_p$  abelsch ist, folgt  $\theta(\beta\alpha\beta^{-1}) = \theta(\alpha)$ , d.h.

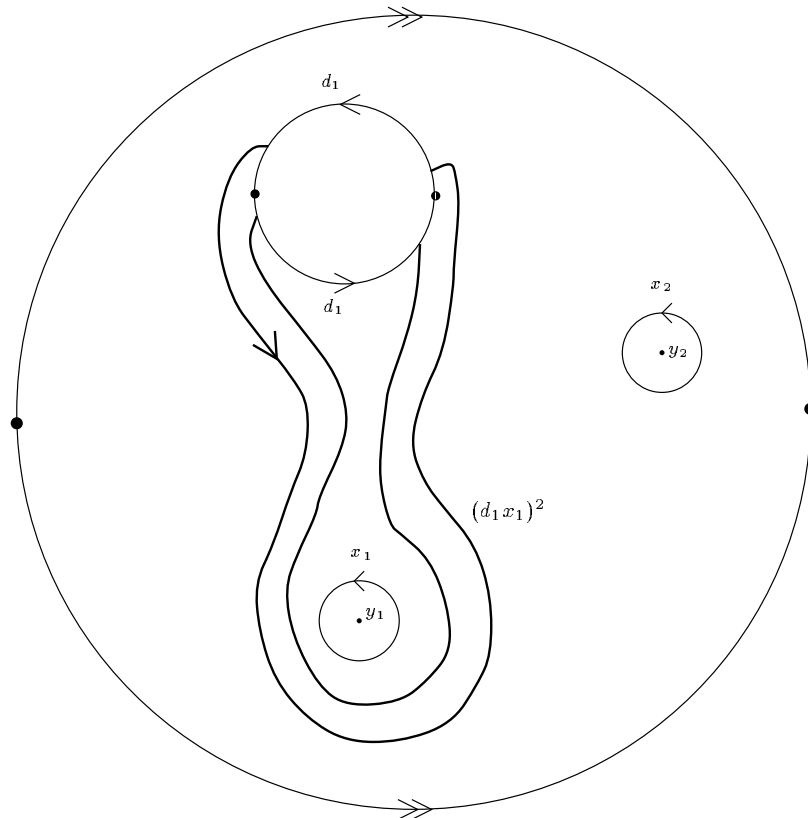


Abb. 3.2:  $(d_1 x_1)^2$

Konjugation liefert nichts Neues. Das Gleiche gilt für die Bildung von Inversen oder Vielfachen. Es bleibt also noch zu überprüfen, dass  $\theta(d_1 x_1)$  und  $\theta(d_1^2 x_1)$  keine Erzeuger von  $Z_p$  sind:

$$\begin{aligned}\theta(d_1 x_1) &= \overline{1778} = \overline{7} \cdot \overline{254}, \\ \theta(d_1^2 x_1) &= \overline{1768} = \overline{17} \cdot \overline{104}.\end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Auch z.B. der Fall  $g' = 2, l = 1$  sieht erfolgsversprechend aus, wenn man nach Abbildungen ohne invarianten Kreis sucht. Hingegen ist dies für  $g' \geq 3$  aussichtslos, da es dann zuviele sogenannte "primitive" Klassen in  $H_1(N_{g'})$  gibt (vergleiche dazu die Einleitung in [23]).

**Satz 3.8.** *Es gibt unendlich viele  $N_g$ , die eine Abbildung ohne invarianten Kreis zulassen.*

**Beweis.** Sei  $k \in \mathbf{N}$  ungerade und definiere

$g$	$p$	$m_1$	$m_2$	$\theta(d_1)$	$\theta(x_1)$	$\theta(x_2)$	$\theta(d_1x_1)$	$\theta(d_1^2x_1)$
$1785k - 18$	$1785k$	$595k$	$105k$	$p - 10$	3	17	$p - 7$	$p - 17$

□

Hier noch einige weitere Beispiele ohne invarianten Kreis mit  $g' = 1$ ,  $l = 2$  und "kleinem"  $g$ :

$g$	$p$	$m_1$	$m_2$	$\theta(d_1)$	$\theta(x_1)$	$\theta(x_2)$	$\theta(d_1x_1)$	$\theta(d_1^2x_1)$
1139	1155	105	165	3	22	1127	25	28
1141	1155	105	231	3	319	830	322	325
1143	1155	105	385	5	44	1101	49	54
1145	1155	231	165	3	85	1064	88	91
1147	1155	385	165	5	39	1106	44	49
1149	1155	385	231	7	81	1060	88	95
1763	1785	105	255	3	442	1337	445	448
1765	1785	357	105	3	130	1649	133	136
1775	1785	255	357	3	14	1765	17	20
1777	1785	255	595	5	182	1593	187	192
1779	1785	357	595	7	10	1761	17	24

### 3.7 Maximale (ungerade) Ordnung

Als Ergänzung zu Satz 1.16 untersuchen wir im Folgenden die maximale Ordnung einer zyklischen Automorphismengruppe im Fall III.

**Notation.** Für gegebenes  $g \geq 3$  bezeichne  $p_{max}(g)$  die grösstmögliche ungerade Ordnung einer periodischen Abbildung auf  $N_g$ . Die Abbildung, die diese maximale Ordnung realisiert, heisse  $\tilde{f}$ . Es sei  $\tilde{g}'$  das zu  $\tilde{f}$  gehörende Orbitgeschlecht und  $\tilde{l}$  die zu  $\tilde{f}$  gehörende Anzahl Verzweigungspunkte. Entsprechend schreiben wir die Verzweigungsindizes von  $\tilde{f}$  als  $\tilde{m}_i$ ,  $i = 1, \dots, \tilde{l}$ .

In Satz 3.12 werden untere und obere Schranken für  $p_{max}(g)$  angegeben. Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir drei Lemmata:

**Lemma 3.9.**  $g$  ist genau dann gerade, wenn  $g'$  gerade ist.

**Beweis.** Dieser Beweis ist eine direkte Konsequenz aus der Riemann-Hurwitz Formel:

$$\frac{g-2}{p} = g' - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right), \quad m_i = \frac{p}{r_i}, \quad p \text{ ungerade, } r_i \text{ ungerade}$$

$$\Rightarrow g - 2 = pg' - 2p + lp - \sum_{i=1}^l r_i$$

$$\Rightarrow pg' = g - 2 + 2p - lp + \sum_{i=1}^l r_i.$$

Sowohl für  $l$  gerade als auch für  $l$  ungerade folgt  $pg' = g + 2k$  (für ein  $k \in \mathbf{N}$ ), woraus sich sofort die Behauptung ergibt.  $\square$

**Bemerkung.** Lemma 3.9 gilt nicht im Fall I.

**Lemma 3.10.** Für  $g$  ungerade ist  $\tilde{g}' = 1$  und  $\tilde{l} = 2$ .

**Beweis.** Sei  $g$  ungerade: Es existiert eine Abbildung  $f$  mit  $p = g$ ,  $g' = 1$ ,  $l = 2$  und  $m_1 = m_2 = p$  (vergleiche das Beispiel im Kapitel 1.3.5). Dies impliziert

$$p_{max}(g) \geq g \tag{3.1}$$

Lemma 3.9 sagt aus, dass  $g'$  ungerade ist. Für  $g' \geq 3$  erhalten wir aus der Riemann-Hurwitz Formel

$$\frac{g-2}{p} = g' - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \geq 1$$

$$\Rightarrow p \leq g - 2 < g \stackrel{(3.1)}{\leq} p_{max}(g).$$

Daraus schliessen wir, dass  $p_{max}(g)$  nur für  $g' = 1$  angenommen wird.

Es bleibt  $\tilde{l} = 2$  zu zeigen. Aus  $3 \leq m_i \leq p$  folgt

$$\frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{m_i} \leq 1 - \frac{1}{p} < 1 \tag{3.2}$$

Die Riemann-Hurwitz Formel (mit  $g' = 1$ ) liefert

$$0 < \frac{g-2}{p} = -1 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \stackrel{(3.2)}{<} -1 + l.$$

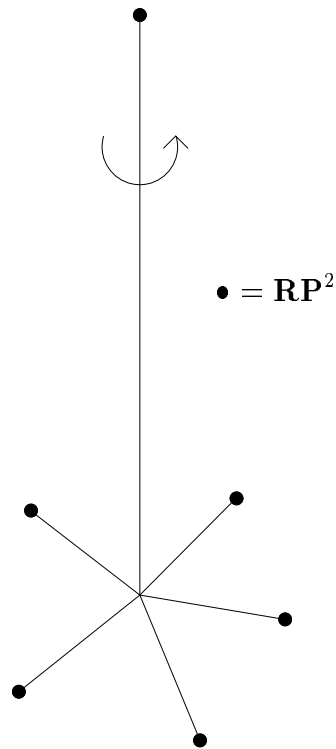


Abb. 3.3:  $p = g - 1$

Damit ist  $l \geq 2$ . Weiter ist

$$\frac{g-2}{p} = -1 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \stackrel{(3.2)}{\geq} -1 + \frac{2}{3}l = \frac{2l-3}{3}$$

$$\Rightarrow p \leq \frac{3(g-2)}{2l-3}.$$

Falls  $l \geq 3$  ist, folgt demnach

$$p \leq g-2 \stackrel{(3.1)}{<} p_{\max}(g).$$

Es bleibt also nur noch  $l = 2$  übrig, womit das Lemma bewiesen ist.  $\square$

**Lemma 3.11.** Für  $g$  gerade ist  $\tilde{g}' = 2$  und  $\tilde{l} = 1$ .

**Beweis.** Sei  $g$  gerade: Es existiert ein  $f$  mit  $p = g - 1$ ,  $g' = 2$ ,  $l = 1$ ,  $m_1 = p$  (siehe Abb. 3.3 für  $p = 5$ ). Folglich gilt

$$p_{\max}(g) \geq g - 1 \tag{3.3}$$

Wegen Lemma 3.9 ist  $g'$  gerade. Im Fall  $g' \geq 4$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{g-2}{p} &= g' - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \geq 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \geq 2 \\ \Rightarrow p &\leq \frac{g-2}{2} < g-1 \stackrel{(3.3)}{\leq} p_{max}(g). \end{aligned}$$

Damit ist  $\tilde{g}' = 2$ .

Um  $\tilde{l} = 1$  zu zeigen, betrachten wir wieder die Riemann-Hurwitz Formel. Diese liefert mit  $g' = 2$

$$\frac{g-2}{p} = \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

Weil die linke Seite dieser Gleichung positiv ist, folgt  $l \geq 1$ . Weiter ist

$$\begin{aligned} \frac{g-2}{p} &= \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \stackrel{(3.2)}{\geq} \frac{2}{3}l \\ \Rightarrow p &\leq \frac{3(g-2)}{2l}. \end{aligned}$$

Falls  $l \geq 2$  ist, folgt also

$$p \leq \frac{3}{4}(g-2) < g-1 \stackrel{(3.3)}{\leq} p_{max}(g).$$

Somit haben wir auch  $\tilde{l} = 1$  bewiesen. □

**Satz 3.12.** *Es gelten folgende untere und obere Schranken für  $p_{max}(g)$ :*

- i) Für  $g$  ungerade ist  $g \leq p_{max}(g) \leq \frac{3}{2}(g+1)$ .
- ii) Für  $g$  gerade ist  $g-1 \leq p_{max}(g) \leq \frac{3}{2}(g-2)$ .

*Beweis.* Wegen Lemma 3.10 und Lemma 3.11 setzen wir

$$\begin{cases} g' = 1, l = 2, & \text{für } g \text{ ungerade} \\ g' = 2, l = 1, & \text{für } g \text{ gerade} \end{cases}$$

i) Die Riemann-Hurwitz Formel lautet

$$\frac{g-2}{p} = -1 + \left(1 - \frac{1}{m_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{m_2}\right) = 1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}.$$

Mit

$$\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \leq 1 - \frac{2}{p} = \frac{p-2}{p}$$



ergibt sich die Abschätzung

$$\frac{1}{3} \leq \frac{g-2}{p} \leq \frac{p-2}{p}$$

und damit  $g \leq p \leq 3(g-2)$ , woraus die Behauptung für  $g=3$  und  $g=5$  folgt. Die Schranke  $p_{max}(3) = 3$  wird übrigens durch das Beispiel in Kapitel 1.3.5 realisiert.

Sei jetzt ein ungerades  $g$  gegeben.

Annahme: Es existiert ein  $p$  mit  $p > \frac{3}{2}(g+1)$ .

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \stackrel{\text{(R-H)}}{=} \frac{g-2}{p} < \frac{g-2}{3(g+1)/2} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{(g+1)/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} > \frac{1}{3} + \frac{1}{(g+1)/2} > \frac{1}{3}.$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $m_1 \leq m_2$ . Weil  $m_i \geq 3$  ungerade ist, kommen höchstens folgende drei Fälle in Frage:

a)  $m_1 = 3, m_2 \mid p$

b)  $m_1 = 5, m_2 = 5$

c)  $m_1 = 5, m_2 = 7$

Fall a): Wir unterscheiden nochmals zwei Fälle:

- $\gcd(3, m_2) = 3$

$$\Rightarrow p = \text{lcm}(m_1, m_2) = m_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{p} < \frac{1}{3} + \frac{1}{(g+1)/2}. \text{ Widerspruch.}$$

- $\gcd(3, m_2) = 1$

$$\Rightarrow p = \text{lcm}(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2$$

$$\Rightarrow \frac{g-2}{p} = 1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{g+1}{p} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow p = \frac{3}{2}(g+1). \text{ Widerspruch.}$$

Fall b): Hier ist  $p = \text{lcm}(m_1, m_2) = 5$ , woraus mit der Riemann-Hurwitz Formel  $g = 5$  folgt. Wir haben aber schon gesehen, dass für  $g = 5$  immer  $p \leq 9$  gilt. Folglich ist  $p \leq \frac{3}{2}(g + 1)$ . Widerspruch.

Fall c):

$$p = \text{lcm}(m_1, m_2) = 35 \stackrel{\text{(R-H)}}{\Rightarrow} g = 25$$

$$\Rightarrow p = 35 < 39 = \frac{3}{2}(g + 1). \text{ Widerspruch.}$$

Bemerkung: Tatsächlich wird  $p_{\max}(25) = 39$  angenommen durch ein  $f$  mit  $m_1 = 3, m_2 = 13$  (siehe Kapitel 3.8).

ii) Sei  $g$  gerade:

$$\text{R-H: } \frac{g-2}{p} = 1 - \frac{1}{m_1}$$

$$\stackrel{(3.2)}{\Rightarrow} \frac{2}{3} \leq \frac{g-2}{p} \leq 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$$

$$\Rightarrow g-1 \leq p \leq \frac{3}{2}(g-2).$$

□

**Bemerkung.** Vergleiche die Resultate mit Satz 1.16 iv), der aussagt, dass wenn man auch gerade  $p$  (Fall IV) zulässt, gilt:

$$p \leq \begin{cases} 2g, & g \text{ ungerade} \\ 2g-2, & g \text{ gerade.} \end{cases}$$

Das maximale  $p$  wird also grösser als unser  $p_{\max}(g)$  und ist immer gerade.

### 3.8 Liste der Abbildungen, in denen $p_{\max}(g)$ realisiert wird ( $3 \leq g \leq 100$ )

In Kapitel 3.1 sind (für  $3 \leq g \leq 20$ ) alle Abbildungen im Fall III aufgeführt. Aus einer solchen Tabelle kann man sofort ablesen, welche Abbildung zu gegebenem  $g$  die maximale Ordnung  $p_{\max}(g)$  realisiert. In der folgenden Tabelle sind diese Abbildungen für  $3 \leq g \leq 100$  aufgelistet.

$g$  ungerade ( $3 \leq g < 100$ ):

$g$	$p_{max}(g)$	$g'$	$m_1$	$m_2$
3	3	1	3	3
5	5	1	5	5
7	9	1	3	9
9	15	1	3	5
11	15	1	3	15
13	21	1	3	7
15	21	1	3	21
17	17	1	17	17
19	27	1	3	27
21	33	1	3	11
23	33	1	3	33
25	39	1	3	13
27	39	1	3	39
29	35	1	5	35
31	45	1	3	45
33	51	1	3	17
35	51	1	3	51
37	57	1	3	19
39	57	1	3	57
41	55	1	5	11
43	63	1	3	63
45	69	1	3	23
47	69	1	3	69
49	75	1	3	25
51	75	1	3	75
53	65	1	5	65
55	81	1	3	81
57	87	1	3	29
59	87	1	3	87
61	93	1	3	31
63	93	1	3	93
65	85	1	5	17

67	99	1	3	99
69	105	1	3	35
71	105	1	3	105
73	111	1	3	37
75	111	1	3	111
77	95	1	5	95
79	117	1	3	117
81	123	1	3	41
83	123	1	3	123
85	129	1	3	43
87	129	1	3	129
89	115	1	5	23
91	135	1	3	135
93	141	1	3	47
95	141	1	3	141
97	147	1	3	49
99	147	1	3	147

$g$  gerade ( $3 < g \leq 100$ ):

$g$	$p_{max}(g)$	$g'$	$m_1$
4	3	2	3
6	5	2	5
8	9	2	3
10	9	2	9
12	15	2	3
14	15	2	5
16	21	2	3
18	17	2	17
20	27	2	3
22	25	2	5
24	33	2	3
26	27	2	9
28	39	2	3
30	35	2	5
32	45	2	3

34	33	2	33
36	51	2	3
38	45	2	5
40	57	2	3
42	45	2	9
44	63	2	3
46	55	2	5
48	69	2	3
50	51	2	17
52	75	2	3
54	65	2	5
56	81	2	3
58	63	2	9
60	87	2	3
62	75	2	5
64	93	2	3
66	65	2	65
68	99	2	3
70	85	2	5
72	105	2	3
74	81	2	9
76	111	2	3
78	95	2	5
80	117	2	3
82	85	2	17
84	123	2	3
86	105	2	5
88	129	2	3
90	99	2	9
92	135	2	3
94	115	2	5
96	141	2	3
98	99	2	33
100	147	2	3

### 3.9 Berechnung von $p_{max}(g)$ für gerades $g$

In diesem Kapitel wollen wir für ein beliebiges gerades  $g$  die Schranke  $p_{max}(g)$  bestimmen. Im anderen Fall ( $g$  ungerade) formulieren wir eine (unvollständige) Vermutung für den Wert von  $p_{max}(g)$ .

Wir beginnen mit einer Vorbetrachtung: Jedem geraden  $g \geq 4$  lässt sich eineindeutig ein Paar  $(n, k) \in \mathbf{N}^2$  zuordnen, so dass gilt:

$$g = 2 + 2^k(2n - 1).$$

Das ist klar, wenn man die Primfaktorzerlegung von  $g - 2$  betrachtet.

**Satz 3.13.** *Sei  $g \geq 4$  gerade. Wir wählen für  $g$  wie oben beschrieben die Darstellung  $g = 2 + 2^k(2n - 1)$ . Dann gilt  $p_{max}(g) = g - 3 + 2n$ .*

**Beweis.** Es existiert eine Abbildung  $f$  mit  $p = g - 3 + 2n$ ,  $g' = 2$ ,  $l = 1$  und  $m_1 = 1 + 2^k = p/(2n - 1)$ . Daraus folgt  $p_{max}(g) \geq g - 3 + 2n$ .

Um  $p_{max}(g) \leq g - 3 + 2n$  zu zeigen, betrachten wir die Riemann-Hurwitz Formel mit  $g = 2 + 2^k(2n - 1)$  und  $g' = 2$ ,  $l = 1$  (wegen Lemma 3.11):

$$\frac{2^k(2n - 1)}{p} = 1 - \frac{1}{m_1}$$

$$\Rightarrow 2^k(2n - 1) = p - \frac{p}{m_1}$$

$$\Rightarrow 2^k(2n - 1)m_1 = m_1p - p = p(m_1 - 1)$$

$$p \text{ ungerade} \Rightarrow 2^k \mid (m_1 - 1)$$

$$\Rightarrow m_1 - 1 = i \cdot 2^k \text{ (für ein } i \in \mathbf{N}\text{)}$$

$$\Rightarrow 2^k(2n - 1)m_1 = p(m_1 - 1) = p \cdot i \cdot 2^k$$

$$\Rightarrow p = \frac{m_1(2n - 1)}{i} = \frac{(i \cdot 2^k + 1)(2n - 1)}{i} = 2^k(2n - 1) + \frac{2n - 1}{i}$$

$$= g - 2 + \frac{2n - 1}{i} \leq g - 2 + 2n - 1 = g - 3 + 2n.$$

□

Die Berechnung von  $p_{max}(g)$  für  $g$  ungerade scheint etwas komplizierter zu sein, obwohl man in der Tabelle in Kapitel 3.8 viele Regelmässigkeiten erkennen kann. Die folgende Vermutung wird numerisch zumindest für  $g < 1000$  bestätigt.

**Vermutung 3.14.** Sei  $g \geq 3$  ungerade,  $j \in \mathbf{N}_0$  und  $p = p_{max}(g)$ . Dann gilt

$$p_{max}(g) = \begin{cases} 3(1+2j), & g = 3 + 4j \\ 3(3+2j), & g = 5 + 4j, j \not\equiv 0 \pmod{3} \\ 5(1+6j), & g = 5 + 24j \\ 5(5+6j), & g = 17 + 24j, j \not\equiv 0 \pmod{5} \\ 9(17+30j), & g = 137 + 240j \\ 17(1+30j), & g = 17 + 480j \\ 17(17+30j), & g = 257 + 480j, j \not\equiv 0 \pmod{17} \end{cases}$$

mit

$$(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) = \begin{cases} (3, p), & g = 3 + 4j \\ (3, p/3), & g = 5 + 4j, j \not\equiv 0 \pmod{3} \\ (5, p), & g = 5 + 24j \\ (5, p/5), & g = 17 + 24j, j \not\equiv 0 \pmod{5} \\ (9, p), & g = 137 + 240j \\ (17, p), & g = 17 + 480j \\ (17, p/17), & g = 257 + 480j, j \not\equiv 0 \pmod{17} \end{cases}$$

**Bemerkung.** In dieser Vermutung wird der Fall  $g = 257 + 8160j$  nicht erfasst. Es scheint aber, dass sich die Gesetzmässigkeiten entsprechend fortsetzen.

### 3.10 Annahme der Schranken aus Kapitel 3.7

In diesem Abschnitt diskutieren wir, für welche  $g$  die unteren und oberen Schranken für  $p_{max}(g)$  aus Satz 3.12 angenommen werden. Für  $g$  gerade ist dies nach Satz 3.13 leicht zu entscheiden.

**Satz 3.15.** Für ungerades  $g$  wird die untere Grenze  $p_{max}(g) = g$  angenommen für  $g = 3, 5, 17, 257$  und für kein anderes  $g < 1000$ .

**Beweis.** Numerisch. □

**Vermutung 3.16.** Diese Grenze wird genau für

$$g = 2^{2^j} + 1, j \in \mathbf{N}_0$$

angenommen.

**Satz 3.17.** Für ungerades  $g$  wird die obere Grenze  $p_{max}(g) = \frac{3}{2}(g+1)$  genau für  $g = -3 + 12k$  oder  $g = 1 + 12k$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) angenommen.

*Beweis.* Es gibt ein  $f$  mit

$$p = \frac{3}{2}(g+1) = \begin{cases} 3(-1+6k), & g = -3 + 12k \\ 3(1+6k), & g = 1 + 12k \end{cases}$$

und

$$g' = 1, l = 2, m_1 = 3, m_2 = \frac{p}{3} = \frac{g+1}{2} = \begin{cases} -1 + 6k, & g = -3 + 12k \\ 1 + 6k, & g = 1 + 12k \end{cases}$$

Dann gilt  $\text{lcm}(m_1, m_2) = p$  und die Riemann-Hurwitz Formel ist erfüllt.

Dass die Grenze für andere  $g$  nicht angenommen wird, sieht man wie folgt. Für  $g = -9 + 12k, -5 + 12k, -1 + 12k$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) ist  $3(g+1)/2$  gerade. Für  $g = -7 + 12k$  ist  $p = 3(g+1)/2$  durch 9 teilbar. Wie im Beweis von Satz 3.12 i) sieht man, dass nur  $m_1 = 3$  in Frage kommt. Wegen  $9|p$  und der lcm-Bedingung müsste  $m_2 = p$  gelten, aber wie im genannten Beweis führt dies zu einem Widerspruch zur Riemann-Hurwitz Formel.  $\square$

**Satz 3.18.** Für gerades  $g$  wird die untere Grenze  $p_{max}(g) = g - 1$  genau für  $g = 2 + 2^k$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) angenommen.

*Beweis.* Wir schreiben  $g$  wie in Satz 3.13 als  $g = 2 + 2^k(2n - 1)$ . Mit dem genannten Satz sehen wir, dass die Gleichung  $p_{max}(g) = g - 3 + 2n = g - 1$  genau für  $n = 1$ , also genau für  $g = 2 + 2^k$  erfüllt wird.  $\square$

**Satz 3.19.** Für gerades  $g$  wird die obere Grenze  $p_{max}(g) = \frac{3}{2}(g-2)$  genau für  $g \in 4\mathbf{N}$  angenommen.

*Beweis.* Genau wie im Beweis von Satz 3.18 sehen wir, dass die Gleichung  $p_{max}(g) = g - 3 + 2n = 3(g-2)/2$  genau für  $g = 4n$  angenommen wird.  $\square$



# Kapitel 4

## Fall II und IV

In den noch nicht untersuchten Fällen II und IV kann ein neues Phänomen auftreten, nämlich  $k' > 0$ , d.h.  $|S/\langle f \rangle|$  besitzt einen Rand. In diesem Fall sind [35, Lemma 1, 2, 3] bzw. Lemma 3.1, 3.2 und 3.3 nicht übertragbar (z.B. gilt  $r = p/2$  in Lemma 1, wenn  $C$  ein “Reflektor” ist). Damit ist natürlich auch die bisherige Theorie über die Existenz von invarianten Kreisen nicht anwendbar, denn die Entwicklung dieser Theorie basierte wesentlich auf den erwähnten Lemmata. Auf die Fälle II ( $k' > 0$ ) und IV ( $k' > 0$ ) gehen wir deswegen in dieser Arbeit nicht mehr ein.

Ziel dieses Abschnitts ist anzudeuten, dass jedoch in den beiden Spezialfällen IIb) ( $k' = 0$ ) und IVb) ( $k' = 0$ ), in denen beispielsweise alle periodischen orientierungsumkehrenden Abbildungen  $f : F_g \rightarrow F_g$  der Ordnung  $p \in 4\mathbf{N}$  erfasst werden, die bisherige Strategie im Wesentlichen übernommen werden kann. Konkret bedeutet dies, dass analoge Versionen von Lemma 1 und 2 weiterhin gelten, wobei man das genau wie in [35] oder Kapitel 3.3 beweist. Ein Problem taucht hingegen bei Lemma 3 auf, denn unter den Voraussetzungen von Lemma 3 ( $p > 2$  und  $C$  ein invarianter Kreis von  $f$ ), ist die Tatsache, dass  $C$  die Fläche  $S$  trennt, nur notwendig aber nicht hinreichend dafür, dass  $\bar{C} := q(C)$  den Quotienten  $S/\langle f \rangle$  trennt. Wir werden deshalb nachher einen Ersatz für die nicht mehr geltende Implikation angeben, doch zuerst verdeutlichen wir das Scheitern dieser in einer Richtung an einem Beispiel (Abb. 4.1):

Sei  $f_1$  die Spiegelung an der eingezeichneten Ebene  $E$  und  $f_2$  die Drehung um  $2\pi/4$  um die eingezeichnete Achse:

- $g = 8$
- $f = f_2 \circ f_1$ ,  $p = 4$
- $l = 1$ ,  $m_1 = 2$
- $g' = 5$  im Fall IIb) bzw.  $g' = 3$  im Fall IVb)

- $k' = 0$
- $\alpha_1 = 1$

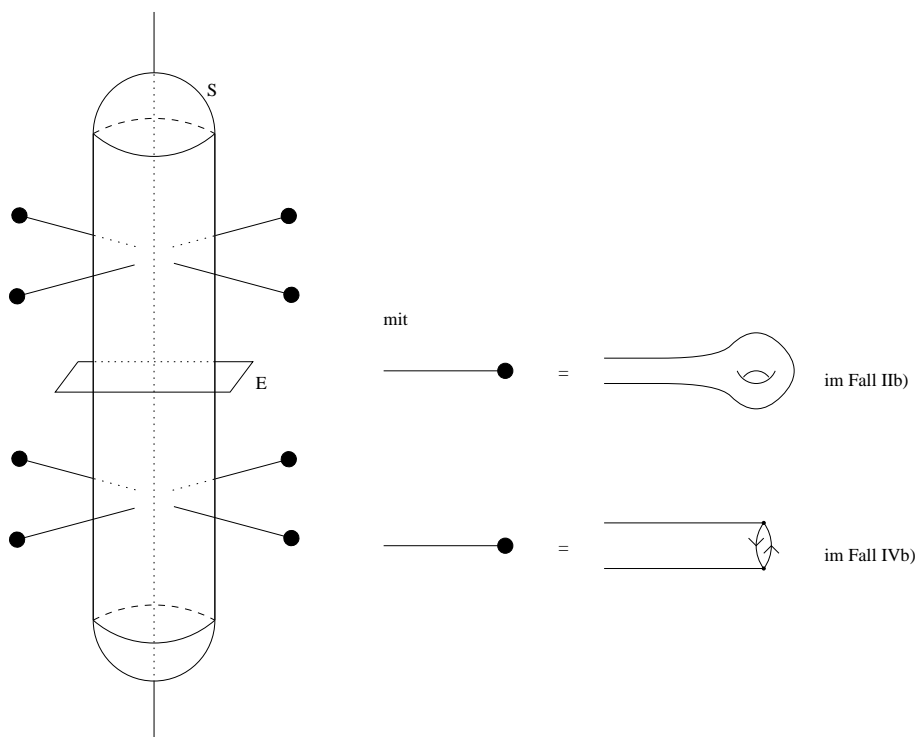


Abb. 4.1: Gegenbeispiele zu “Lemma 3”

Sei  $C$  der Kreis  $S \cap E$ . Dann trennt  $C$  die Fläche  $S$ , aber  $\bar{C}$  trennt  $S/\langle f \rangle$  tatsächlich nicht.

Man erinnere sich, dass Lemma 3 (in Kombination mit Lemma 2) wichtig war, um aus der Existenz eines nicht-trennenden Kreises  $\bar{C}$  in  $S/\langle f \rangle$  (wobei  $\theta([\bar{C}])$  ein Erzeuger von  $Z_p$  ist) zu schliessen, dass  $q^{-1}(\bar{C})$  ein invarianter nicht-trennender Kreis, also ein invarianter essentieller Kreis ist. Aus dem nächsten Lemma bekommt man einen gleichwertigen Ersatz für Lemma 3, immer in den Fällen IIb) ( $k' = 0$ ) und IVb) ( $k' = 0$ ).

**Lemma 4.1.**  $C$  ist genau dann essentiell, wenn  $[C]_{\pi_1(S)} \neq [1]_{\pi_1(S)}$  ist.

**Beweis.** Die Richtung “ $\Leftarrow$ ” ist äquivalent zur Aussage, dass  $[C]_{\pi_1(S)} = [1]_{\pi_1(S)}$  gilt, falls  $C$  eine Scheibe auf  $S$  begrenzt. Das ist aber klar.

Umgekehrt ist zu zeigen, dass aus  $[C]_{\pi_1(S)} = [1]_{\pi_1(S)}$  folgt, dass  $C$  eine Scheibe auf  $S$  begrenzt. Dies wird in [10, Theorem 1.7] bewiesen.  $\square$

Die Quotientenabbildung  $q : S \rightarrow S/\langle f \rangle$  induziert einen Homomorphismus

$$q_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(|S/\langle f \rangle|),$$

insbesondere ist

$$q_*([1]_{\pi_1(S)}) = [1]_{\pi_1(S/\langle f \rangle)}$$

und aus  $[\bar{C}]_{\pi_1(S/\langle f \rangle)} \neq [1]_{\pi_1(S/\langle f \rangle)}$  folgt  $[C]_{\pi_1(S)} = [q^{-1}(\bar{C})]_{\pi_1(S)} \neq [1]_{\pi_1(S)}$ . Daraus schliesst man mit Lemma 4.1 wie erhofft, dass  $C$  essentiell ist, falls  $\bar{C}$  den Quotienten  $S/\langle f \rangle$  nicht trennt.

Somit sind die Grundlagen gegeben, um in den Fällen IIb) ( $k' = 0$ ) und IVb) ( $k' = 0$ ) die Existenz von invarianten (essentiellen) Kreisen zu untersuchen. Weil hier  $p$  gerade ist, fallen allerdings im Gegensatz zu den Fällen I und III die leicht zu beweisenden Sätze mit  $p$  prim (siehe [35, Theorem 1] und Kapitel 3.4) weg.

## Anhang A

# Computerprogramme

Dieser Anhang besteht aus zwei Computerprogrammen, die beide im Fall I alle Abbildungen ohne invarianten Kreis für  $l = 3$ ,  $g \leq 100$  berechnen. Damit kann also die Tabelle in Kapitel 2.5.4 erstellt werden. Das Grundkonzept des C++ - Programms in A.1 kann leicht auf die Fälle  $l > 3$  übertragen werden (wobei sich aber die Länge und Laufzeit des Programms stark erhöhen). Hingegen benutzt das Maple-Programm in A.2 eine spezielle Eigenschaft des Falls  $l = 3$ , nämlich dass  $p > O(g)$  sein muss (siehe Satz 2.11 und auch die Bemerkung auf Seite 52).

### A.1 C++ - Programm

```
#include <iostream.h>
int gcd(int x, int y)
{
    int z;
    if (x<y)
    {
        z=x;
        x=y;
        y=z;
    }
    while(y!=0)
    {
        z=x%y;
        x=y;
        y=z;
    }
    return x;
}
```

```

int lcm2(int u, int v)
{
    return (u*v)/gcd(u,v);
}
int lcm3(int u, int v, int w)
{
    return lcm2(lcm2(u,v),w);
}
int main()
{
    for (int p=30; p<223; p++)
    {
        if (p==30 || p==42 || p==60 || p==66 || p==70 ||
            p==78 || p==84 || p==90 || p==102 || p==105 ||
            p==110 || p==114 || p==120 || p==126 || p==130 ||
            p==132 || p==138 || p==140 || p==150 || p==154 ||
            p==156 || p==165 || p==168 || p==170 || p==174 ||
            p==180 || p==182 || p==186 || p==190 || p==195 ||
            p==198 || p==204 || p==210 || p==220 || p==222)
        {
            for (int r1=2; r1<=p/5; r1++)
            {
                if (p%r1==0)
                {
                    for (int r2=r1+1; r2<=p/3; r2++)
                    {
                        if (p%r2==0 && lcm2(p/r1,p/r2)==p)
                        {
                            for (int r3=r2+1; r3<=p/2; r3++)
                            {
                                if (p%r3==0 && (p-r1-r2-r3)%2==0 &&
                                    lcm2(p/r1,p/r3)==p && lcm2(p/r2,p/r3)==p &&
                                    lcm3(p/r1,p/r2,p/r3)==p)
                                {
                                    if ((2+p-r1-r2-r3)/2<=100) // Bedingung: g<=100
                                    {
                                        for (int h1=2; h1<p; h1++) // h1 entspricht theta(x1)
                                        {
                                            if (p/gcd(p,h1)==p/r1) // Bedingung: h1 hat Ordnung m1 in Zp
                                            {
                                                for (int h2=2; h2<p; h2++)

```



## A.2 Maple-Programm

```
with(numtheory):
drei:=proc(Bg,Tg)
local g,Og,p,mtop,m1,m2,m3;
for g from Bg to Tg do
  if irem(g,2)=0 then Og:=2*g+2;
  else Og:=2*g-2;
  fi;
  for p from Og+1 to 4*g+2 do
    if nops(factorset(p))>2 then
      if irem(p,2)=0 then mtop:=p/2;
      elif irem(p,3)=0 then mtop:=p/3;
      elif irem(p,5)=0 then mtop:=p/5;
      else mtop:=floor(p/7);
      fi;
      for m1 from 2 to mtop do
        if irem(p,m1)=0 then
          for m2 from m1 to mtop do
            if irem(p,m2)=0 then
              if ilcm(m1,m2)=p then
                for m3 from m2 to mtop do
                  if irem(p,m3)=0 then
                    if (2*g-2)/p=1-1/m1-1/m2-1/m3 then
                      if ilcm(m1,m3)=p then
                        if ilcm(m2,m3)=p then
                          if ilcm(m1,m2,m3)=p then
                            print(g,p,p/m3,p/m2,p/m1);
                            fi;
                          fi;
                        fi;
                      fi;
                    fi;
                  fi;
                fi;
              fi;
            fi;
          fi;
        fi;
      fi;
    fi;
  fi;
od; end: drei(11,100);
```

# Literaturverzeichnis

- [1] Accola R.D.M., *On the number of automorphisms of a closed Riemann surface*, Trans. Amer. Math. Soc. **131**(1968), 398–408
- [2] Berstein I., Edmonds A.L., *On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **247**(1979), 87–124
- [3] Bredon G.E., *Topology and geometry*, Grad. Texts in Math. **139**, Springer, New York, 1993
- [4] Bujalance E., *Cyclic groups of automorphisms of compact non-orientable Klein surfaces without boundary*, Pacific J. Math. **109**(1983), no.2, 279–289
- [5] Bujalance E., Etayo J.J., Gamboa J.M., Gromadzki G., *Automorphism groups of compact bordered Klein surfaces. A combinatorial approach*, Lecture Notes in Math. **1439**, Springer, Berlin, 1990
- [6] Buser P., *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Progr. Math. **106**, Birkhäuser, Boston, MA., 1992
- [7] Chillingworth D.R.J., *Winding numbers on surfaces II*, Math. Ann. **199**(1972), 131–153
- [8] Costa A.F., *Classification of the orientation reversing homeomorphisms of finite order of surfaces*, Topology Appl. **62**(1995), no.2, 145–162
- [9] do Carmo M.P., *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston, MA., 1992
- [10] Epstein D.B.A., *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115**(1966), 83–107
- [11] Etayo Gordejuela J.J., *Non-orientable automorphisms of Riemann surfaces*, Arch. Math. (Basel) **45**(1985), no.4, 374–384
- [12] Farkas H.M., Kra I., *Riemann surfaces*, Grad. Texts in Math. **71**, Springer, New York, 1992 (Second Edition)
- [13] Fenn R.A., *Techniques of geometric topology*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **57**, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1983



- [14] Hall W., *Automorphisms and coverings of Klein surfaces*, Ph.D. thesis, Southampton University, 1978
- [15] Harvey W.J., *Cyclic groups of automorphisms of a compact Riemann surface*, Quart. J. Math. Oxford, Ser.(2) **17**(1966), 86–97
- [16] Hurwitz A., *Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*, Math. Ann. **41**(1893), 403–442
- [17] Jones G.A., Singerman D., *Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint*, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1987
- [18] Li L., *Uniqueness of orientation-preserving periodic maps of maximal order on orientable closed surfaces*, Beijing Daxue Xuebao **29**(1993), no.1, 15–20
- [19] Macbeath A.M., *On a theorem of Hurwitz*, Proc. Glasgow Math. Assoc. **5**(1961), 90–96
- [20] Macbeath A.M., *The classification of non-euclidean plane crystallographic groups*, Canad. J. Math. **19**(1967), 1192–1205
- [21] Maclachlan C., *A bound for the number of automorphisms of a compact Riemann surface*, J. London Math. Soc. **44**(1969), 265–272
- [22] Meeks III W.H., *Circles invariant under diffeomorphisms of finite order*, J. Differential Geom. **14**(1979), no.3, 377–383
- [23] Meeks III W.H., Patrusky J., *Representing homology classes by embedded circles on a compact surface*, Illinois J. Math. **22**(1978), no.2, 262–269
- [24] Miranda R., *Algebraic curves and Riemann surfaces*, Grad. Stud. Math. **5**, Amer. Math. Soc., Providence, RI., 1995
- [25] Moore M.J., *Fixed points of automorphisms of compact Riemann surfaces*, Canad. J. Math. **22**(1970), 922–932
- [26] Nielsen J., *Om regulære Riemannske Flader*, Mat. Tidsskr. B(1932), 1–18  
Englische Übersetzung in *Jakob Nielsen: collected mathematical papers. Vol. 2*, edited and with a preface by Vagn Lundsgaard Hansen. Contemp. Mathematicians, Birkhäuser, Boston, MA., 1986, 1–12
- [27] Nielsen J., *Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen*, Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **15**(1937), no.1, 77pp.  
Englische Übersetzung in *Jakob Nielsen: collected mathematical papers. Vol. 2*, edited and with a preface by Vagn Lundsgaard Hansen. Contemp. Mathematicians, Birkhäuser, Boston, MA., 1986, 65–102

- [28] Schwarz H.A., *Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler, eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen*, J. Reine Angew. Math. **87**(1879), 139–145
- [29] Scott P., *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15**(1983), no.5, 401–487
- [30] Singerman D., *Automorphisms of compact non-orientable Riemann surfaces*, Glasgow Math. J. **12**(1971), 50–59
- [31] Steiger F., *Die maximalen Ordnungen periodischer topologischer Abbildungen geschlossener Flächen in sich*, Comment. Math. Helv. **8**(1935), 48–69
- [32] Stillwell J., *Classical topology and combinatorial group theory*, Grad. Texts in Math. **72**, Springer, New York, 1993 (Second Edition)
- [33] Stöcker R., Zieschang H., *Algebraische Topologie*, Teubner, Stuttgart, 1994 (Zweite Auflage)
- [34] Thurston W.P., *Three-dimensional geometry and topology. Vol.1*, Princeton Math. Ser. **35**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ., 1997
- [35] Wang S., *Essential invariant circles of surface automorphisms of finite order*, Differential geometry and topology (Tianjin, 1986-87), 275–285, Lecture Notes in Math. **1369**, Springer, Berlin-New York, 1989
- [36] Wang S., *Maximum orders of periodic maps on closed surfaces*, Topology Appl. **41**(1991), no.3, 255–262
- [37] Whyburn G.T., *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **28**(1942)
- [38] Wiman A., *Über die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlecht  $p = 3$ , welche eindeutige Transformationen in sich zulassen*, Bihang till. K. svenska Vet.-Akad. Handlingar **21**(1895), no.1, 1–23
- [39] Yokoyama K., *Complete classification of periodic maps on compact surfaces*, Tokyo J. Math. **15**(1992), no.2, 247–279